МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н. В. Безугла, М. О. Безуглий

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані системи»
спеціалізаціями «Комп'ютерно-інтегровані медичні системи» та «Комп'ютерно-інтегровані технології виробництва приладів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензенти: *Жученко А.І.*, д.т.н., професор
Кулик Г.М., к.т.н., доцент

Відповідальний редактор *Тимчик Г.С.*, д.т.н., професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 24.05.2018 р.)
за поданням Вченої ради приладобудівного факультету (протокол № 4/18 від 23.04.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Безугла Наталя Василівна, канд. техн. наук
Безуглий Михайло Олександрович, канд. техн. наук, доцент

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ

Спеціальні розділи математики. Комп'ютерний практикум. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціалізацій «Комп'ютерно-інтегровані медичні системи» та «Комп'ютерно-інтегровані технології виробництва приладів» / Н. В. Безугла, М. О. Безуглий ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,76 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 69 с.

Навчальний посібник призначено для студентів приладобудівного факультету, які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» (спеціалізаціями «Комп'ютерно-інтегровані медичні системи» та «Комп'ютерно-інтегровані технології виробництва приладів»). У посібнику наведено мету і завдання комп'ютерного практикуму, їх зміст та обсяг. Розглянуто теоретичні положення, послідовність та хід виконання, наведено вимоги щодо оформлення звітів.

ЗМІСТ

ВСТУП

Представлений комп'ютерний практикум містить інструкції до виконання чотирьох практичних робіт в середовищі MS Excel, що доповнюють теоретичний матеріал з дисципліни «Спеціальні розділи математики», зокрема розділів теорії ймовірностей, статистики та комбінаторики. Кожен практикум складений за визначеним планом, що включає мету роботи та її змістовність. Далі наведено теоретичні відомості, математичні викладки та, за необхідності, графіки. Кожен практикум містить завдання та приклади їх виконання, а також неповторювані дані для різних варіантів. Для виконання поставлених завдань студенти повинні знати математичну сутність розглянутих обчислень, послідовність виконання розрахунків та володіти навичками застосування їх на практиці.

Комп'ютерний практикум № 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. ПЕРЕСТАНОВКА. РОЗМІЩЕННЯ. ПОЄДНАННЯ

Мета. Навчитись розв'язувати задачі теорії ймовірності з елементами комбінаторики із застосуванням програми MS Excel.

Змістовність роботи: Факторіал та його властивості; визначення і формули для розрахунку варіантів перестановок, розміщень з повтореннями і без повторень, поєднань; використання функцій MS Excel для розрахунків комбінацій.

1.1. Теоретичні відомості

Факторіал будь якого невід'ємного числа n це добуток всіх послідовних натуральних чисел від 1 до числа n. Факторіал числа n позначають через **n!**. Тобто можна записати що:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \quad (1.1)$$

З формули (1.1) випливає, що факторіали для n=0 та n=1 дорівнюють 0!=1 та 1!=1.

При збільшенні числа n (після n=14) значення факторіалу починає стрімко зростати (рис.1.1) і тому розрахунок стає занадто складним. У цьому випадку користуються **наближенням Муавра-Стирлінга**.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1.2)$$

n	n!
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1,30767E+12

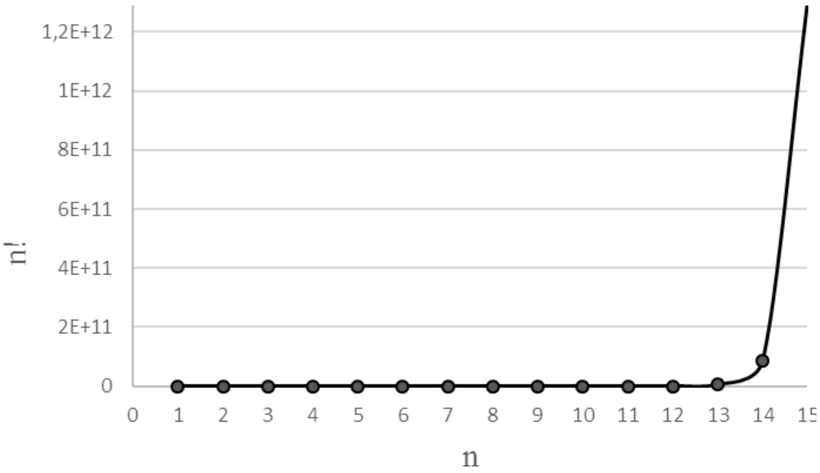


Рис. 1.1 Значення факторіалу для різних значень *n*

Для розрахунку факторіалу в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ФАКТР(n)**».

Перестановкою (без повторень) є розміщення заданої кількості різних предметів у визначеному порядку, при цьому предмети не повторюються.

Нехай дано *n* різних предметів, тоді кількість можливих перестановок P_n визначається за формулою 1.3.

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \tag{1.3}$$

Перестановкою (**з повтореннями**) є розміщення заданої кількості різних предметів у визначеному порядку, предмети при цьому можуть повторюватись.

Нехай *n* – загальна кількість предметів, з яких є *i* повторень: n_1, n_2,..,n_i. Тоді кількість можливих перестановок $P_{n(повтор)}$ визначається за формулою:

$$P_{n(\,повтор\,)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_i!}. \tag{1.4}$$

Розміщенням (без повторень) n предметів по m місцям (розміщення з n по m) називають комбінацію з m різних предметів, які містять n предметів. **Порядок** послідовності в даному випадку **важливий**.

Кількість можливих перестановок з n по m позначають як A_n^m та розраховують за формулою розміщень:

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Для розрахунку розміщень без повторень в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ПЕРЕСТ(n;m)**».

Розміщенням (з повтореннями) n предметів по m місцям (розміщення з n по m з повтореннями) називають комбінація з m предметів, які містять n предметів. Тобто є n типів предметів та m місць, на кожне з яких може стати предмет будь якого типу. Будь який тип предмету може зустрітись в отриманій комбінації будь-яку кількість разів, але **порядок** послідовності в даному випадку **важливий**.

Кількість можливих розміщень з повтореннями з n по m позначають як $A_{n(\text{повтор})}^m$ та розраховують за формулою розміщень:

$$A_{n(\text{повтор})}^m = n^m. \tag{1.6}$$

Для розрахунку розміщень з повтореннями в MS Excel використовують наступний вираз «=**n^m**»**.**

Поєднаннями (без повторень) з n предметів по m називають комбінацію вибору m предметів з n без врахування порядку вибору. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Кількість можливих поєднань з n по m позначають як C_n^m та розраховують за формулою поєднань:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.7}$$

Для розрахунку розміщень без повторень в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ЧИСЛОКОМБ(n;m)».**

Поєднаннями (з повтореннями) з n предметів по m називають комбінація вибору m предметів з n без врахування порядку вибору. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Тобто є n типів предметів з яких необхідно вибрати m. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Кількість можливих поєднань з n по m позначають як $C_{n(\,повт\,)}^m = C_{n+m-1}^m$ та розраховують за формулою поєднань:

$$C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m+m-1)!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \tag{1.8}$$

В таблиці 1.1. Наведено основні формули комбінаторики та відповідні функції в MS Excel.

Таблиця 1.1 Формули комбінаторики

Назва	**Формула**	**Функція в MS Excel**
Перестановки	$P_n = n!$	ФАКТР(n).
Розміщення (без повторень)	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	ПЕРЕСТ(n;m)
Розміщення (з повтореннями)	$A_{n(\,повтор\,)}^m = n^m$	n^m
Поєднання (без повторень)	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	ЧИСЛКОМБ(n;m)

Правило суми. Якщо деякий об’єкт *A* може бути вибраний із сукупності обєктів *m* способами, а другий об’єкт *B* може бути вибраний *n* способами, то вибрати **або** *A*, **або** *B* можна *m*+*n* способами.

Правило добутку. Якщо об’єкт *A* може бути вибраний із сукупності об’єктів *m* способами і після кожного такого вибору об’єкт *B* можна вибрати *n* способами, то пара об’єктів (*A*, *B*), тобто *A* **і** *B*, у вказаному порядку може бути вибрана *n·m* способами.

1.2. Завдання для виконання

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву: **КП1_Прізвище студента_№варіанту**.

Завдання 1.1. Визначити відхилення значення факторіалу, використовуючи функцію ФАКТР (*n*) від значення, розрахованого за формулою Муавра-Стирлінга (1.1).

Створити таблицю в MS Excel наступного вигляду

Таблиця 1.2 Оформлення результатів завдання 1.1

n	n!	Формула Муавра-Стирлінга	Відхилення

Заповнити її для n=*i*…*k*, з інтервалом *a*. Значення *i* вибираються з таблиці 1.3, *k*=20+*i*+№В, *a* – для непарного №В – 1, для парного №В – 2.

Таблиця 1.3 Вхідні дані до завдання 1.1 відповідно до номеру варіанта

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
i	1	4	6	8	10	1	4	6	8	10	2	5
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
i	1	4	6	8	10	1	4	6	8	10	3	7

Побудувати порівняльні графіки залежності кількості елементів до точного та наближеного значення факторіалу n!.

Приклад оформлення наведено в додатку 1.1.

Порядок виконання Завдання 1.1.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 1» на «Завдання 1.1».
2. Записати вхідні дані як показано в додатку 1.1.
3. Створити в MS Excel таблицю 1.2.
4. Під колонкою *n* комірці присвоїти значення *i*, для цього в робочому рядку набрати «=» та натиснути на комірку зі значенням *i* (рис.1.2). (У даному випадку значення *i* знаходиться в комірці D5).
5. Для створення значень від *i-1* до *k* з інтервалом *a* виконати наступні дії: Перейти у відповідну комірку та задати значення n_1+a наступною формулою «=ЕСЛИ(C13=$D$6;"stop";C13+$D$7)». Де символ $ фіксує значення, а оператор «ЕСЛИ» зупиняє значення, що більші за k. Отримане значення (C14 на рис.1.2) скопіювати і вставити в задану кількість комірок.

	C	D	E	F	
4	Дано:				
5	i=	1			
6	k=	15			
7	a=	1			
8					
9					
10	**Роз'вязок:**				
11					
12	n	n!	Формула МС	Відхилення	
13	1				
14	2				
15	3				

Рис. 1.2 Фрагмент оформлення вхідних даних до Завдання 1.1

6. Під колонкою n! комірці (D13) присвоїти функцію ФАКТР(n). Для цього виконати наступні дії. Натиснути f_x, вибрати функцію ФАКТР і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення n_1 (C13 на рис.1.2) (рис.1.3).

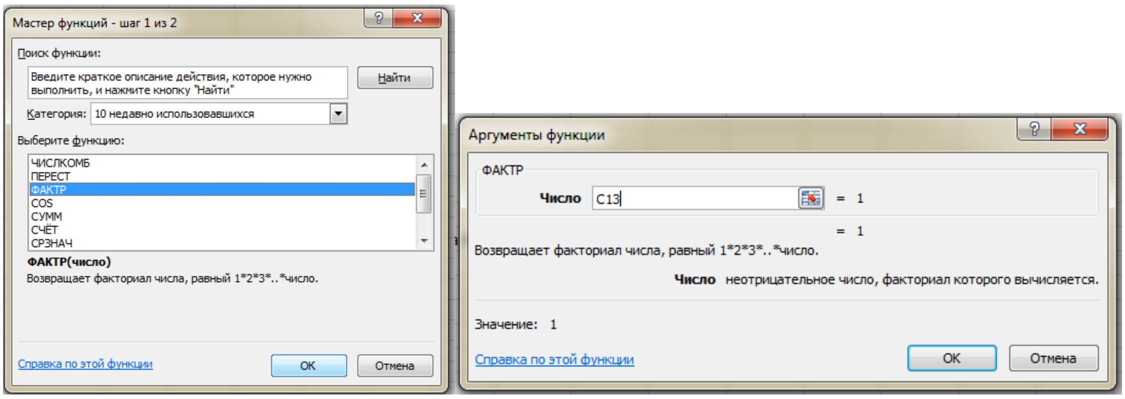


Рис. 1.3 Вибір функції «ФАКТР»

7. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень *n*.

8. Під колонкою Формула МС комірці (Е13) присвоїти формулу (1.2), яка в середовищі MS Excel матиме наступний вигляд: «=((2*3,14*C13)^(1/2))*(C13/2,7)^C13».

9. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень *n*.

10. Знайти відхилення, для цього від колонки «n!» відняти колонку «Формула МС».

11. Побудувати графік залежності кількості елементів від точного та наближеного значення факторіалу n!. Підписати осі: «Макет» → «Название осей», назва легенди: «Конструктор» → «выбрать данные» → «изменить».

12. Зробити висновок.

Завдання 1.2.

Визначити кількість можливих комбінацій елементів *n* в залежності від використаного закону комбінаторики згідно таблиці 1.1.

Порядок виконання Завдання 1.2.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 2» на «Завдання 1.2».

2. Задати вхідні дані: загальну кількість об’єктів *n* та сприятливих виходів *m* відповідно до номеру варіанта (таблиця 1.4).

Таблиця 1.4 Вхідні дані до завдання 1.2 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	8	10	12	16	18	20	24	26	28	30	35	38
m	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	8	10
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n	30	28	26	24	20	18	16	12	10	8	7	14
m	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	4	8

3. Для розрахунку операцій комбінацій створити таблицю 1.5

Таблиця 1.5 Оформлення результатів завдання 1.2

Операція	Кількість
Перестановки **n** об'єктів без повторень	
Перестановки **n** об'єктів з повтореннями	
Розміщення по **m** елементів з **n** без повторень	
Розміщення по **m** елементів з **n** з повтореннями	
Поєднання **m** елементів з **n** без повторень	
Поєднання **m** елементів з **n** з повтореннями	

4. Вибрати комірку для розрахунку кількості перестановок *n* об'єктів без повторень. Натиснути f_x, вибрати функцію «ФАКТР» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення *n* (у даному випадку C6, див додаток 2).

5. Обрати комірку для розрахунку кількості перестановок об'єктів з повтореннями за формулою (1.4). За значення n_1 взяти значення *m*. Оскільки існує обов'язкова умова *n*>*m*, при якій розрахунок можливий, скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього з можливих f_x виберемо «ЕСЛИ» (рис.1.4) та заповниим наступні комірки:

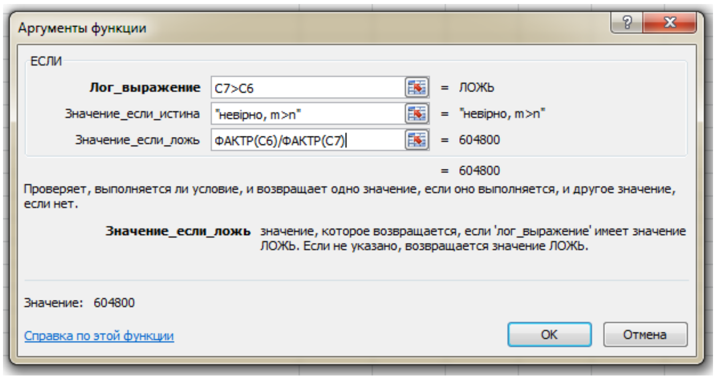


Рис. 1.4 Вікно оператора «ЕСЛИ»

5.1. У комірці «Лог_выражение» ввести умову, у даному випадку $n>m$.

5.2. У комірці «Значение_если_истина» ввести результат: у даному випадку $m>n$, тому згідно п.5. «невірно».

5.2. У комірці «Значение_если_ложь» ввести результат: у даному випадку $n>m$, тому згідно п.5 це значення визначається за формулою 1.4, яка в MS Excel задається як:

«Ф=АКТР(n)/((ФАКТР(n_1)·ФАКТР(n_2)·…·ФАКТР(n_n))».

6. Обрати комірку для розрахунку кількості розміщень по m об'єктів з n без повторень за формулою (1.5). Оскільки існує обов'язкова умова $n>m$, при якій розрахунок можливий, скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього повторимо операції 5.1-5.2, з урахуванням того, що формула для визначення кількості перестановок без повторень в MS Excel задається як «ПЕРЕСТ(n,m)».

7. У сусідній комірці отримати кількість розміщень по m об'єктів з n без повторень за допомогою вбудованої функції «ПЕРЕСТ(n,m)» (рис.1.5). Натиснути f_x, вибрати функцію «ПЕРЕСТ» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення n (в даному випадку С6), «Число_выбраных» - значення m (в даному випадку С7).

8. Вибрати комірку для розрахунку кількості розміщень по m об'єктів з n з повтореннями за формулою (1.6). У даному випадку умова $n>m$ неважлива. Тому задаємо формулу (1.6). як n^m («^» - задається як «shift6»).

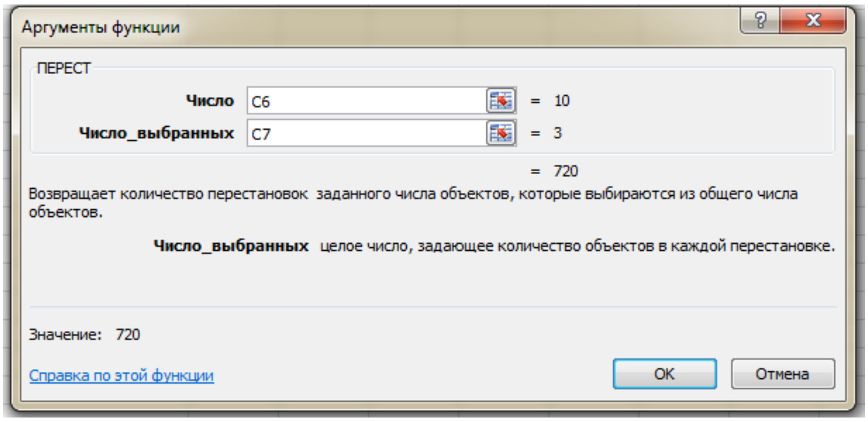


Рис. 1.5 Вікно функції «ПЕРЕСТ»

9. Вибрати комірку для розрахунку кількості перестановок *m* об’єктів з *n* без повторень за формулою (1.7). Оскільки існує обов’язкова умова *n*>*m*, при якій розрахунок можливий, то скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього повторити пункти 5.1-5.2, з урахуванням того, що формула для визначення кількості перестановок без повторень в MS Excel задається як «ЧИСКОМБ(n, m)».

10. У сусідній комірці отримати кількість перестановок *m* об’єктів з *n* без повторень за допомогою вбудованої функції «ЧИСЛКОМБ» (рис.1.6). Натиснути f_x, вибрати функцію «ЧИСЛКОМБ» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення *n* (в даному випадку C6), «Число_выбраных» - значення *m* (в даному випадку C7).

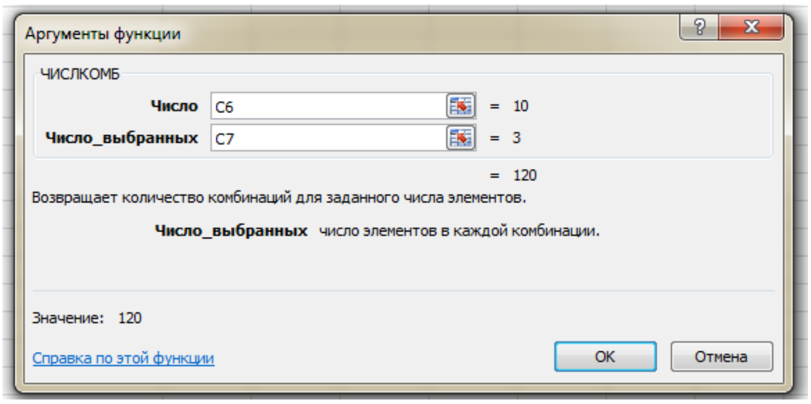


Рис. 1.6 Вікно функції «ЧИСЛОКОМБ»

11. Вибрати комірку для розрахунку кількості поєднань *m* об’єктів з *n* з повтореннями за формулою (1.8). У даному випадку умова *n*>*m* неважлива. Тому задамо формулу (1.8). як «=ФАКТР(n+m-1)/ ФАКТР(m)·ФАКТР(n-1)».

12. Зробити перевірку – змінити значення вхідних даних, що виконувалась умова *m*>*n*.

13. Приклад оформлення завдання показано в додатку 1.2.

Завдання 1.3. Розв’язати та оформити в MS Excel через вбудовані функції наступні задачі. Приклад оформлення в додатку 1.3.

1.3.1. Набираючи код, робітник забув *m* останніх цифр, але пам'ятає що вони *n* і набрав їх навмання. Усі цифри різні. Знайти ймовірність того, що він набрав їх правильно з першого разу. Значення *m* та *n* приведено в табл.1.6.

Таблиця 1.6 Вхідні дані до завдання 1.3.1 та 1.3.2 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	5	4
n	без 0 і 3	парні і 0	Не-парні	різні	Не-парні	без 1 і 3	парні	парні і 0	різні	без 0, 1 і 3	без 2 і 7	різні
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4
n	без 1 і 3	без 1	парні	різні	парні і 0	без 1	без 0, 1 і 3	Не-парні	парн і і 0	без 0	без 5	різні

1.3.2. У ящику 20+№В деталей, помічених номерами 101, 102, …, 130. Навмання достали *m* карт. Знайти ймовірність того, що карти мають задані номера. Значення *m* приведено в таблиці 1.6.

1.3.3. У коробці *n* деталей, помічених номерами 1, 2, … n. Навмання по одній витягають всі деталі. Знайти ймовірність того, що деталі з'являться в зростаючому порядку. Де *n*=№В+10.

1.3.4. Студент займається спортом, причому n1 днів плаванням, n2 днів легкою атлетикою та має n3 днів вихідних. Складіть студенту графік, щоб заняття не повторювалися.

Таблиця 1.7 Вхідні дані до завдання 1.3.4 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n1	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	3
n2	4	2	1	2	2	4	2	1	4	3	3	2
n3	2	3	4	1	4	1	2	2	2	2	3	2
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n1	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	0	5
n2	3	2	2	3	1	3	3	2	1	0	3	1
n3	1	1	4	2	3	0	3	3	3	3	4	1

1.3.5. Шифр складається з *m*1 цифр та *m*2 букв. Скільки існує варіантів даного шифру, якщо спочатку йдуть цифри, а потім букви?

Вхідні дані: для ***парного номеру*** варіанту – цифри від 0 до 9, букви голосні; для ***непарного*** – цифри непарні, букви приголосні; значення *m*1 та *m*2 наведено в табл.1.8.

Таблиця 1.8 Вхідні дані до завдання 1.3.5 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m1	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	2	4
m 2	2	3	4	1	4	1	2	2	2	2	3	2
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m 1	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	4	5
m 2	3	2	2	3	1	3	3	2	1	0	2	2

1.3.6. У партії *n* деталей, з яких *m* стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих *k* може виявитись:

А) хоча б *m1* стандартна; Б) *m2* стандартні; В) *m3* стандартні;

m1 – для ***парного номеру*** варіанту 2, для ***непарного*** – 1; ***m2*** **-** для парного номера варіанту 3, для непарного – 2; ***m3*** = *k*

Таблиця 1.9 Вхідні дані до завдання 1.3.6 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	7	5
n	8	10	12	12	12	7	9	11	13	13	13	11
k	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	3	3
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	6	7
n	9	9	10	10	12	7	8	9	14	14	11	10
k	3	3	4	4	5	3	3	3	4	5	3	3

1.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді.

2. Назва електронного файлу **КП1_Прізвище студента_№варіанту.**

3. Файл повинен місти наступні елементи:

Дано: *вхідні дані* – позначити жовтим;

Знайти: *невідоме з вказаною умовою* – позначити червоним;

Розв'язок:

Позначити задані умови через події. Зробити опис кожної дії – позначити зеленим.

Відповідь: - позначити червоним.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.

5. Оформлення завдань згідно Додатків 1.1-1.3.

6. Висновки по роботі.

Якщо звіт не відповідає вимогам, робота не зараховується!

1.4. Контрольні запитання

1. Факторіал та його властивості. Як відрізняються значення, отримані за формулою Муавра-Стерлінга?

2. Чим перестановки без повторень відрізняються від перестановок з повтореннями? Наведіть приклад.

3. Чим розміщення з повтореннями відрізняються від розміщень без повторень? Наведіть приклад.

4. Чим поєднання без повторень відрізняються від поєднань з повтореннями?

5. У яких випадках використовують формулу перестановок?

6. У яких випадках використовують формулу розміщень? Наведіть приклад.

7. У яких випадках використовують формулу поєднань? Наведіть приклад.

Комп'ютерний практикум №2

ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Мета: Навчитись застосовувати вбудовані функції програми MS Excel для розв'язку задач теорії ймовірності, які містять повторні незалежні випробування.

Змістовність роботи: Формула Бернуллі. Застосування граничних випадків формули Бернуллі: локальна та інтегральна теореми Лапласа, формула Пуассона. Використання функцій MS Excel для розрахунків.

2.1. Теоретичні відомості

Нехай проводиться n випробувань, у кожному з яких може з'явитися подія A. Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від того, з'явилась або не з'явилась ця подія в інших випробуваннях, то такі випробування називаються незалежними щодо події A.

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитися подія A з ймовірністю $P(A) = p$. Ймовірність того, що подія A не наступить для кожного випробування дорівнює $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Ймовірність $P_n(k)$ того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явиться рівно k раз, обчислюється за формулою, яку називають **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k} \quad \text{або} \quad P_n(k) = \frac{n!}{m!(n-m!)} p^k \cdot p^{n-k}. \qquad (2.1)$$

Для спрощення аналітичних розрахунків за формулою Бернуллі використовують вбудовану функцію «**БИНОМРАСП (k;n;p;0)**», де k -

кількість появ події, n – число незалежних випробувань, р – ймовірність появи події, «0» - вказує на те, що визначається ймовірність появи події рівно k разів. Якщо останній аргумент дорівнює «1», то функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія наступить не менше ніж k разів.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність $P_n(k)$ того, що у великій кількості n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0<p<1$), подія наступить рівно k разів (у будь-якій послідовності), обчислюється за формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x), \tag{2.2}$$

де $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функція Лапласа, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за локальною теоремою Лапласа використовують наступні вбудовані функції:

***f(x)* = НОРМРАСП (*x*;0;1;0)** та ***x*=НОРМАЛИЗАЦИЯ(k;λ;σ),** де $\lambda = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$, 0 – середнє арифметичне розподілення, 1 – стандартне відхилення, 0 – тип функції (у даному випадку вагова).

Для знаходження значення x використовують функцію **«НОРМ.ОБР(вероятность;среднее;стандартное_откл)».**

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність $P_n(k_1,k_2)$ того, що у великій кількості n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0<p<1$), подія наступить не менше k_1 раз і не більше k_2, обчислюється за формулою (2.3):

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2.3}$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ - інтегральна функція Лапласа, а $x_1,x_2=\frac{k_1,k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за інтегральною теоремою Лапласа використовують наступні вбудовані функції: **Ф(*x*) = НОРМ.СТ.РАСП (x;1)** та **x = НОРМАЛИЗАЦИЯ (k;λ;σ).**

Для знаходження значення *x* використовують функцію «**НОРМ.СТ.ОБР((1+вероятность)/2)».**

У випадку малої ймовірності $p \to 0$ появи події A рівно k разів в n незалежних дослідах при $np < 10$,користуються **законом Пуассона**:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \tag{2.4}$$

де $\lambda = np$.

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за законом Пуассона використовують вбудовану функцію «**ПУАССОН (x; λ; 0)»** для таких параметрів: x – кількість подій, $\lambda = n{\cdot}p$ − середнє значення; 0 – вказує на тип функції (в даному випадку вагова).

Імовірність того, що **відхилення відносної частоти** m/n від **постійної ймовірності** p по абсолютній величині не перевищує заданого числа (ε >0), тобто імовірність здійснення нерівності $|m/n-p|\le\varepsilon,$ наближено дорівнює значенню подвоєної функції Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=2\Phi(x) \text{ при } x=\varepsilon\sqrt{n/(pq)}. \tag{2.5}$$

Кількість дослідів *n*, які потрібно провести для того, щоб **з ймовірністю, не менше *P*1**, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз, знаходиться за формулою:

$$n \geq log(1-P_1)/log(1-p). \qquad (2.6)$$

Число k_0 появи події A в серії з n дослідів, ймовірність якого найбільша, називається **найбільш ймовірним числом** появи події A в n дослідах. Дане число знаходять з виразу:

$$np-q \leq k_0 < np+p. \qquad (2.7)$$

В таблиці 2.1 наведено основні формули, умови їх використання для розрахунку ймовірності у випробуваннях з повтореннями, а також відповідні їм функції в MS Excel.

Таблиця 2.1 Основні формули для розрахунку ймовірності у випробуваннях з повтореннями

Назва	Формула	Функція в MS Excel	Умови
Формула Бернуллі	$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k}$	БИНОМРАСП(k;n;p;0)	
Локальна теорема Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x),$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$ $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$	$f(x)$=НОРМРАСП(x;0;1;0) x=НОРМАЛИЗАЦИЯ(k;λ;σ) де λ=np, σ= $\sqrt{npq}$	$n \to \infty$
Інтегральна теорема Лапласа	$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ $x_1,x_2=\frac{k_1,k_2-np}{\sqrt{npq}}$	Ф(x)=НОРМ.СТ.РАСП(x;1)	$n \to \infty$
Закон Пуассона	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$ $\lambda = p \cdot n$	ПУАССОН (x; λ; 0)	p→ 0

2.1. Завдання до виконання роботи

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву: **КП2_Прізвище студента_№варіанту**.

Завдання 2.1. Дослідити зміни значень ймовірностей, отриманих за допомогою формули Бернуллі та її граничних відхилень. Побудувати порівняльні графіки.

Визначити:

а) ймовірність на заданому проміжку $k1<k<k2$;

б) ймовірність того, що відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p не перевищує ε;

в) кількість дослідів n, які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше $P1$, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз;

г) найбільш ймовірне число k_0 появи події A в n дослідах

Вхідні дані:

- ***n*=20**;
- ***k*=0…15** з інтервалом 1, **k1=1+№В, k2=5+№В** *для перших 10 по списку*,
- ***k*=0…10**, **k1=№В - 10, k2=№В - 4** з інтервалом 1 для всіх інших;
- ***p, ε, P*1 –** беруться з таблиці 2.3 відповідно до номеру №В.

Приклад оформлення наведено в додатку 2.1.

Таблиця 2.2 Вхідні дані до завдання 2.1.

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
p	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9
ε	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,01	0,02
***P*1**	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,3	0,7
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
ε	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0.02	0,03
***P*1**	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,85	0,8
p	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,6	0,3

Порядок виконання Завдання 2.1.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 1» на «Завдання 2.1».

2. Записати вхідні дані як показано в додатку 2.1.

3. Створити таблицю в MS Excel наступного вигляду.

Таблиця 2.3.

k	Бернуллі	Лапласа	Пуассона	x	$f(x)$	$\Phi(x)$

4. Задати значення k з інтервалом 1.

5. У відповідній комірці ввести формулу Бернуллі, яка визначається через вбудовану функцію «БИНОМРАСП(k;n;p;0)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «число_успехов» – k_i, «число_испытаний» – n, «вероятность_успеха» – p, «интегральная» - 0.

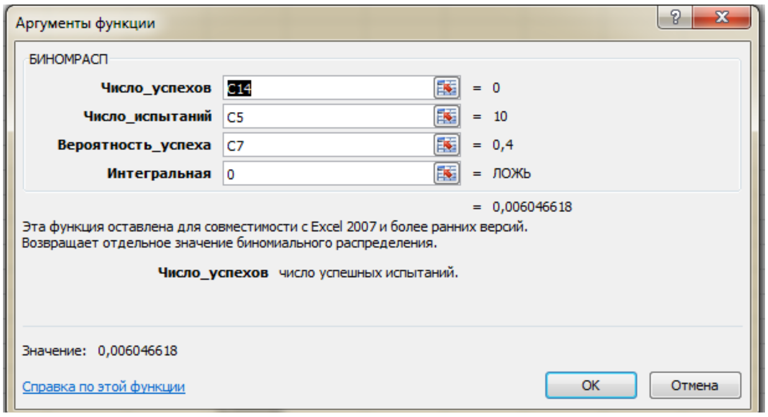


Рис. 2.1 Вікно функції «БИНОМРАСП»

6. Закріпити C$7 та C$5, щоб не відбувалось зміщення по рядках. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень k.

7. Розрахувати значення $\lambda = n{\cdot}p$, що в MS Excel задається як «=n*p», та $\sigma=(n{\cdot}p{\cdot}q)\text{^}0.5$ і, відповідно в MS Excel, – «=КОРЕНЬ(n*p*(1-p))».

8. Для користування формулою Лапласа потрібно визначити x та $f(x)$:

8.1. Визначити x за допомогою вбудованої функції «НОРМАЛИЗАЦИЯ (k;λ;σ)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «X» – k_i, «среднее» – λ, «стандартное_откл» – σ.

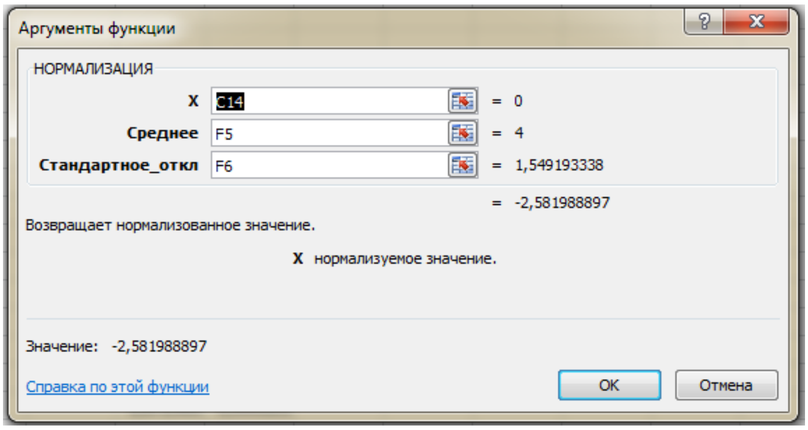


Рис. 2.2 Вікно функції «НОРМАЛИЗАЦИЯ»

8.2. Визначити *f*(*x*) за допомогою вбудованої функції «НОРМРАСП (*x*;0;1;0)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «*X*» – значення *x*, отримане у п.8.1; «среднее» – 0, «стандартное_откл» – 1, «интегральная» - 0.

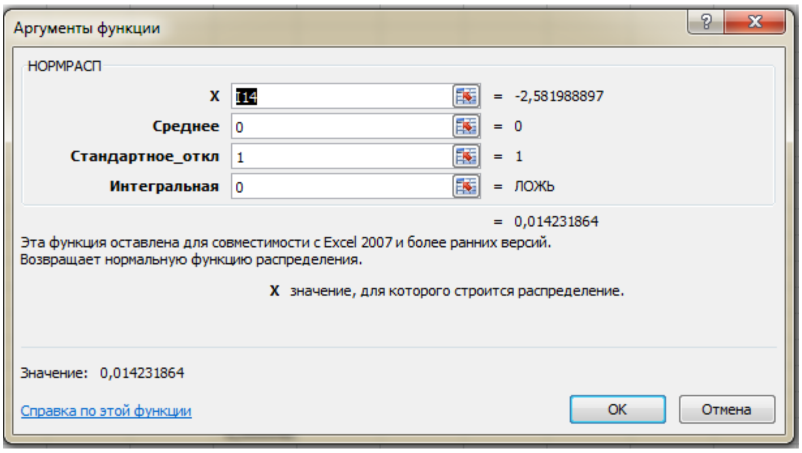


Рис. 2.3 Вікно функції «НОРМРАСП»

9. У відповідній комірці ввести формулу Лапласа, яка визначається відношення *f(x)* до σ, і відповідно в MS Excel задається як: *f(x)*/ σ.

10. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень *k*.

11. У відповідній комірці ввести формулу Пуассона, яка визначається через вбудовану функцію «ПУАССОН (x; λ; 0)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «x» – k_i, «среднее» – λ, «интегральная» - 0.

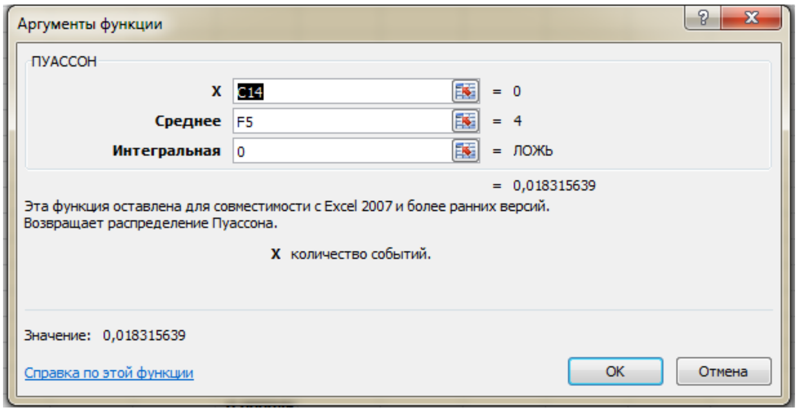


Рис.2.4 Вікно функції «ПУАССОН»

12. Знайти сумарні значення, виділивши необхідні колонки та використавши значок «сума» головного меню (рис.2.5).

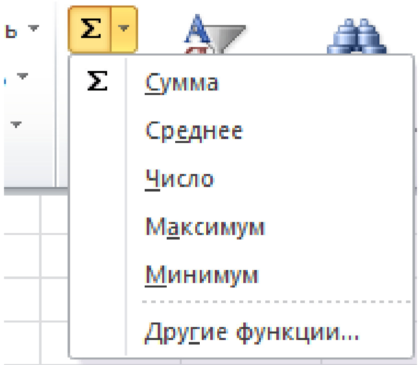


Рис. 2.5 Вікно вибору функції

13. Визначити *Ф*(*x*) за допомогою вбудованої функції **«НОРМ.СТ.РАСП (*x*;1) - 0,5»**. Присвоїти коміркам відповідні значення: «Х» – значення *x*, отримане в п.8.1; «интегральная» - 1.

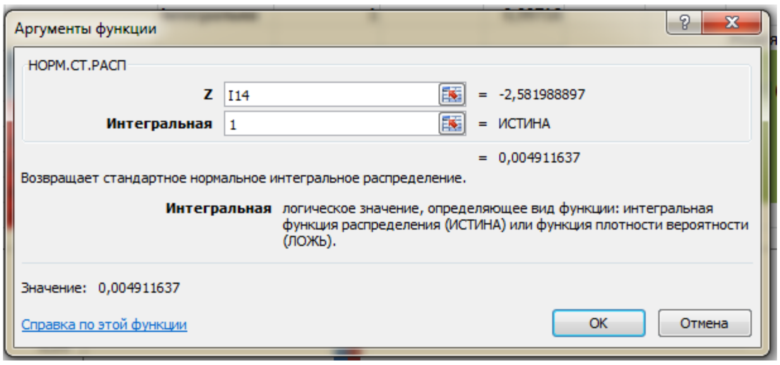


Рис. 2.6 Вікно функції «НОРМ.СТ.РАСП»

14. Визначити ймовірність на заданому проміжку $k1<k<k2$ за формулою (2.3):

14.1. Обрати з загального числа значення $\Phi(x_1)$ та $\Phi(x_2)$, що відповідають *k1* та *k2*.

14.2. Знайти різницю $\Phi(x_2)$ - $\Phi(x_1)$.

15. Визначити ймовірність того, що відхилення відносної частоти *m/n* від постійної ймовірності *p* не перевищує *ε*. Задати формулу (2.5) в комірці K29, що в MS Excel задається як «=2*(НОРМ.СТ.РАСП(C12*(КОРЕНЬ(C5/(C7*C8)));1)-0,5)», де C12 – значення *ε,* C5 – значення загальної кількості дослідів, C7 – значення ймовірності, C8 – значення, протилежне до ймовірності.

16. Визначити кількість дослідів *n*, які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше *P*1, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз за формулою (2.6). Комірці K30 присвоїти значення «=LOG(1-C11)/LOG(1-C7)», де C7 – значення ймовірності, C11 – значення *P*1.

17. Округлити отримане значення в п.16 до більшого за допомогою вбудованої функції «ОКРВВЕРХ.ТОЧН(K30)» в комірці K31.

18. Визначити найбільш ймовірне число k_0 появи події *A* в *n* дослідах за формулою (2.7). Присвоїти комірці J32 значення «=C5*C7-C8», а L32 - =C5*C7-C7.

19. Округлити отримане значення в п.18 до більшого за допомогою вбудованої функції «=ОКРВВЕРХ.ТОЧН(J32)».

20. Побудувати графік залежності значень *k* від трьох законів. Підписати осі та легенди (див. комп'ютерний практикум № 1, завд.1, п.11).

21. Зробити перевірку: а) n{1…k=n}, б) p→0; n→∞; в) n→∞;

Завдання 2.2. Розв'язати та оформити в MS Excel через вбудовані функції наступні задачі.

У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 2» на «Завдання 2.2».

Задача 2.2.1. У кожному з *n* спрацювань системи аварійної сигналізації подія *A*, тобто перевищення тиску, відбувається з постійною імовірністю *p*.

а) обчислити всі ймовірності P_n (k), k= 0,1,2,...,n, де k – кількість подій *A*.

б) побудувати діаграму ймовірностей.

в) визначити найймовірнішу кількість порушень технологічного процесу через перевищення тиску у реакторі k_0 та розрахувати ймовірність її появи.

Значення *n* та *p* беруть з таблиці 2.4 згідно №В.

Таблиця 2.4 Вхідні дані до завдання 2.2.1

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16	16	14
p	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.3	0.04
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16	8	10
p	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.6	0.8

Задача 2.2.2. Ймовірність появи події *A* при кожному випробуванні дорівнює *p*. Здійснено *n* незалежних випробувань.

Визначити ймовірність того, що:

а) подія *A* наступить рівно *k* разів **(№В)**;

б) подія *A* наступить від *k1* до *k2* разів включно.

Значення *n*, *p*, *k*, *k1* та *k2* беруть з таблиці 2.5 згідно №В.

Таблиця 2.5 Вхідні дані до завдання 2.2.2

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	400	300
p	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4	0,6	0,7	0,6
k1	70	82	75	200	205	209	190	195	200	355	205	75
k2	78	88	100	222	226	228	205	210	215	392	226	100
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	200	250
p	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,5	0,9
k1	360	370	260	265	270	485	490	498	330	340	360	370
k2	395	400	305	300	285	520	535	540	375	380	395	400

Задача 2.2.3. Помилкове спрацювання системи аварійної сигналізації відбувається з імовірністю *p*. Знайти ймовірність того, що серед усіх *n* спрацювань відбуваються:

а) точно *k*-те помилкове спрацювання **(№В)**;

б) менше *k1-х* помилкових спрацювань*****;

в) більше *k1-1* помилкових спрацювань;

г) ймовірність відхилення відносної частоти *m/n* від постійної ймовірності *p* не перевищує *ε;*

д) кількість дослідів *n*, які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше *P*1, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз

Значення *n, p, ε, P1, k1* та *k2* беруть з таблиці 2.6 згідно №В.

Таблиця 2.6 Вхідні дані до завдання 2.2.3

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	250	250	250	250	300	300	300	300	400	400	250	550
p	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,04	0,03
k1	8	9	10	11	15	17	20	22	20	22	5	4
ε	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02
P1	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,7	0,9
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	
n	400	400	450	450	450	450	500	500	500	500	450	150
p	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,03
k1	23	24	30	32	33	20	25	22	20	24	8	8
ε	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02
P1	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,9

УВАГА! *При розрахунку «не більше» користуються інтегральною функцією, тобто в функції «ПУАССОН (х; λ; 1)» присвоїти комірці «интегральная» - 1. При цьому «більше» = 1 – «не більше».

2.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді не пізніше ніж до наступного комп'ютерного практикуму.
2. Назва електронного файлу **КП2_Прізвище студента_№варіанту.**
3. Файл повинен містити наступні елементи:

Дано:

вхідні дані – позначити жовтим;

Знайти:

невідоме з вказаною умовою – позначити червоним;

Розв'язок:

Зробити опис кожної дії – позначити зеленим.

Перевірка: - позначити синім.

Відповідь: - позначено червоним.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.

3. Оформлення завдань згідно Додатку 2.1.

5. Висновки по роботі.

Якщо звіт не відповідає вимогам, то робота не зараховується!

2.4. Контрольні запитання

1. Які закони використовуються для оцінки ймовірності про повторенні випробувань?
2. Опишіть закон Бернуллі та його граничні теореми.
3. Якими функціями MS Excel задаються основні закони?
4. Як визначається число найймовірнішої появи події?
5. Як визначається ймовірність відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p, що не перевищує ε;?
6. Як визначається кількість дослідів n, які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше $P1$, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз?

Комп'ютерний практикум № 3

ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мета: Навчитись застосовувати вбудовані функції програми MS Excel для побудови розподілу випадкової величини та розрахунку її числових характеристик.

Змістовність роботи: розподіл дискретних випадкових величин, розподіл неперервних випадкових величин, числові характеристики випадкових величин, розрахункові функції MS Excel.

3.1. Теоретичні відомості

Випадковою називають величину, значення якої схильні до розкиду при повторенні дослідів. Випадкові величини бувають дискретні і неперервні.

Дискретною називають випадкову величину, яка набуває окремих (ізольованих) можливих значень із заданою ймовірністю.

Рядом розподілу дискретних випадкових величин називають відповідність між можливими значеннями й їх ймовірністю; його можна задати *таблицею, аналітично або графічно*.

Таблиця розподілу має вигляд табл.3.1, де перший рядок містить можливі значення X, а другий – їх ймовірності P.

Таблиця 3.1. Таблиця розподілу дискретної випадкової величини X

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для цього в прямокутній системі координат будують точки (x_i, p_i), а потім з'єднують їх відрізками. Отриману фігуру називають **багатокутником розподілу** (рис.3.1).

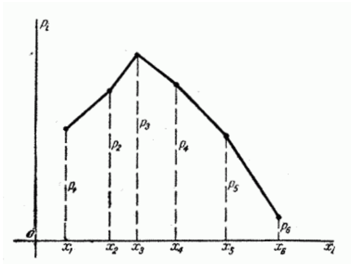


Рис. 3.1 Багатокутник розподілу

Функцією розподілу називають функцію $F(x)$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, меншого x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини X можна одержати на основі ряду її розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ P_1, & x_1 < x \le x_2 \\ P_1 + P_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{N-1} P_i, & x\big|_{N-1} < x \le x_N \\ 1, & x > x_N \end{cases} . \qquad (3.1)$$

Графіком функції розподілу дискретної випадкової величини є східчаста лінія (рис.3.2).

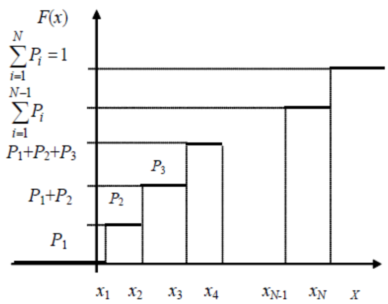


Рис. 3.2 Графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X

Неперервною називають випадкову величину, яка може набувати всіх значень із деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Випадкова величина називається неперервною, якщо має місце невід'ємна функція *f(x)*, що задовольняє при будь яких значеннях *x* вираз (3.2):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(x). \tag{3.2}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини наведено на рис. 3.3.

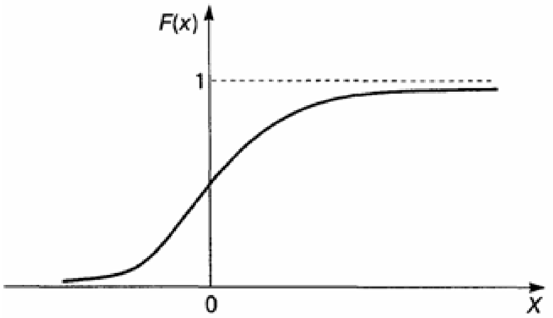


Рис. 3.3 Графік функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називають функцію $f(x)$, яка є першою похідною від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \tag{3.3}$$

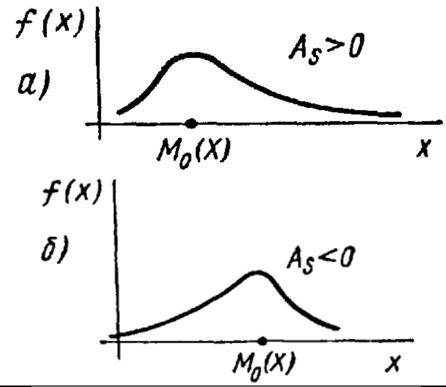
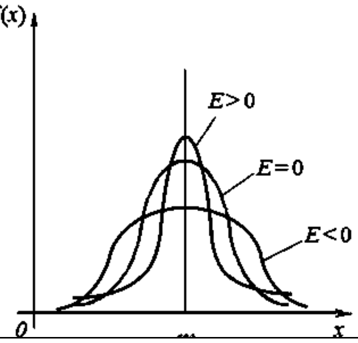
Для опису розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини щільність розподілу **непридатна**.

Основні властивості функції та щільності розподілу випадкової величини X наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2. Властивості функції та щільності розподілу

Функція розподілу:	**Щільність розподілу:**
$0 \le F(x) \le 1.$	$f(x) \ge 0$
$F(x_2) \ge F(x_1)$ *якщо* $x_2 \ge x_1.$	$\int_a^b f(x)dx = 1.$
$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$	$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0;\quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$	

Таблиця 3.3. Основні числові характеристики випадкової величини та їх властивості

Характеристика	Формула	Властивості
Математичне сподівання	$M(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \end{cases}$	1. $M(C) = C$ 2. $M(CX) = CM(X)$ 3. $M(XY) = M(X)M(Y)$ 4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$
Дисперсія	$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - M(X))^2 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \end{cases}$	1. $D(C) = 0$ 2. $D(CX) = C^2 D(X)$ 3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ 4. $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$
Середнє квадратичне відхилення	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	
Коефіцієнт асиметрії	$A = \dfrac{\mu_3}{\sigma(X)^3}$	
Ексцес	$E = \dfrac{\mu_4}{\sigma(X)^4} - 3$	

де $\mu_k = M\left[\left(X-\nu_1\right)^k\right] = \begin{cases} \sum_i (x_i-\nu_1)^k \cdot p_i, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\nu_1)^k f(x)dx \end{cases}$, а $\nu_1 = M(X)$.

Модою (***M₀***) називають значення випадкової величини, яке зустрічається частіше усього, тобто має максимальну ймовірність для дискретної випадкової величини або максимум функції щільності розподілу ймовірностей при неперервній випадковій величині.

Медіаною (M_e) випадкової величини називається таке її значення, при якому має місце рівність: $P\left\{X < M_e\right\} = P\left\{X > M_e\right\} = \frac{1}{2}$

Розглянемо основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики (таблиця 3.4), а також функції MS Excel, що використовуються для їх реалізації.

Таблиця 3.4. Основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики:

Розподіл	**Пара-метр**	**Формула**	**Числові характеристики**
		Дискретні величини	
Рівномірний	n	$P(X=\mathrm{k}) = \frac{1}{n}$ k=1,2…n	$M(X) = \frac{n+1}{2}$ $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$ $As = 0, Es = -1.25$
Біноміальний	n, p	$P_n(\mathrm{k}) = C_n^k p^k q^{n-k}$ k=0,1,2…n	$M(X) = n \cdot p$; $D(X) = n \cdot p \cdot q$; $As = \frac{q-p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$; $Es = \frac{1-6p \cdot q}{n \cdot p \cdot q}$;
Пуассона	$\lambda = n \cdot p$	$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, k=0,1,2…n	$M(X) = D(X) = \lambda$ $As(X) = Es(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Геометричний	p	$P\left(X=k\right)=q^{k-1}p.$ k=1,2…n	$M(X)=\frac{1}{p};\ D(X)=\frac{q}{p^2};$ $As(X)=\frac{2-p}{\sqrt{q}};\ Es(X)=6+\frac{p^2}{q};$
Гіпер-геометричний	N, M, n	$P\left(X=m\right)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ m=0,1,2…min(M,n)	$M(X)=\frac{n\cdot M}{N};$ $D(X)=\frac{n\cdot M\cdot(N-M)\cdot(N-n)}{(N-1)\cdot N^2};$ $As(X)=\frac{(N-2M)\cdot(N-2n)\cdot\sqrt{-1+N}}{(N-2)\cdot\sqrt{M\cdot n(N-M)\cdot(N-n)}};$ $Es(X)=\frac{N^2(N-1)\cdot(N-2n)}{n(N-2)(N-3)(N-n)}\times$ $\times\left(\frac{N\cdot(N+1)-6N\cdot(N-n)}{M\cdot(N-M)}+\frac{3n\cdot(N-n)\cdot(N+6)}{N^2}-6\right)$
Неперервні величини			
Рівномірний	a < b	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$	$M(X)=\frac{a+b}{2};$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$ $A=0;\ E=-1.2;$
Нормальний	σ>0 -∞<μ<∞	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$ $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}dz$	$M(X)=\alpha;$ $D(X)=\sigma^2;$ $A=E=0.$
Показниковий	λ>0	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$	$M(X)=1/\lambda;$ $D(X)=1/\lambda^2;$ $A=2;\ E=6;$

Таблиця 3.5. Основні закони розподілу дискретних величин в MS Excel:

Розподіл	**MS Excel**	**Пояснення**
Дискретні		
Рівномірний	1/n	n – число дослідів
Біноміальний	БИНОМРАСП (k;n;p;0)	«число_успехов» – k_i, «число_испытаний» – n, «вероятность_успеха» – p, «интегральная» - 0.
Пуассона	ПУАССОН (x; λ; 0)	«x» – k_i, «среднее» – λ, «интегральная» - 0.
Геометричний	$(1-p)^{k-1}\cdot p$	p – ймовірність
Гіпергеометричний	ГИПЕРГЕОМЕТ (k; n; M; N)	«число_успехов_в_выборке» - k «размер_выборки — n «число_успехов_в_совокупности» —M «размер_совокупности — N
Неперервні		
Рівномірний	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	$a < x \le b$
	$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$	
Нормальний	$f(x)$=НОРМРАСП (x;0;1;1)	«x» – значення x, «среднее» – 0, «стандартное_откл» – 1, «интегральная» - 1.
	F(x)=НОРМ.СТ.РАСП (x;1)	«x» – значення x, «интегральная» - 1.
	x=НОРМАЛИЗАЦИЯ (k;λ;σ)	$\lambda=np$, $\sigma=\sqrt{npq}$
Показниковий	f(x)= ЭКСПРАСП (x; λ; 0)	«x» – k_i, «среднее» – λ, «интегральная» - «0» або «1»
	F(x)= ЭКСПРАСП (x; λ; 1)	

3.2. Завдання до виконання роботи

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву: **КПЗ_Прізвище студента_№варіанту**.

Завдання 3.1. Задати таблицю розподілу дискретної випадкової величини. Розрахувати числові характеристики дискретної випадкової величини. Знайти функцію розподілу. Побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу.

Вхідні дані:

Таблиця розподілу відповідно до номеру варіанта (додаток 3.1, табл. Д.3.1). Приклад виконання завдання показано в додатку 3.2.

Порядок виконання Завдання 3.1.

1. Перейменувати «Лист 1» у «Завдання 3.1»
2. Створити таблицю з вхідними даними (табл. 3.1).
3. Перевірити властивість ймовірності $\Sigma p_i=1$.
4. Розмістити масив X та P у вертикальне положення. Для цього скопіювати рядки і при вставці вибрати функцію «Транспортировать А».
5. Розрахувати математичне сподівання M(X) – у відповідній комірці задати функцію «СУММПРОИЗВ (массив 1, массив 2)», де – «масив 1» - значення x_i, «масив 2» - значення p_i. В даному випадку X (C12:C21), P(D12:D21).

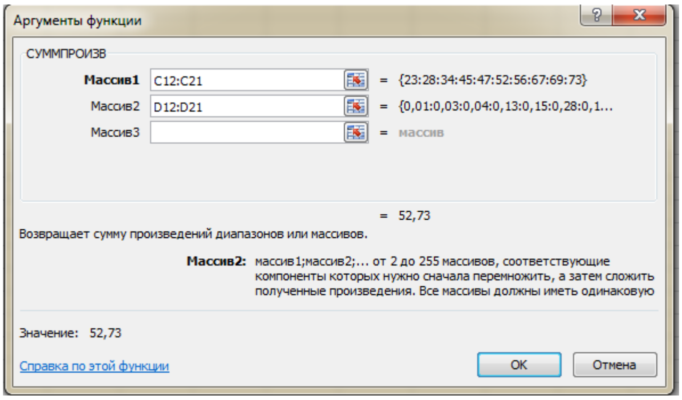


Рис. 3.4 Вікно «Аргументи функції «СУММПРОИЗВ»»

6. Розрахувати дисперсію D(X):

- задати «x_i − M(X)». Комірку із значенням M(X) закріпити за допомогою «$». Створити відповідний масив даних.

- у відповідній комірці задати функцію «СУММПРОИЗВ (массив 1, массив 2, массив 3)», де – «массив 1» та «массив 2» - значення «x_i − M(X)» (див. табл.3.3), «масив 3» - значення p_i. У даному випадку «x_i − M(X)» (E12:E21), *P*(D12:D21).

7. Розрахувати середнє квадратичне відхилення, задавши у відповідній комірці функцію «КОРЕНЬ» з дисперсії.

8. Розрахувати коефіцієнт асиметрії A(X):

- задати «(x_i − M(X))^3» та створити відповідний масив даних.

- у відповідній комірці відповідно до таблиці 3.3 *A(X)* задати формулою: «=СУММПРОИЗВ (массив 1, массив 2)»/σ^3, де – «масив 1» - значення «(x_i − M(X))^3», «масив 2» - значення p_i. У даному випадку «(x_i − M(X))^3» (F12:F21), *P*(D12:D21).

9. Розрахувати ексцес E(X):

- задати «(x_i − M(X))^4» та створити відповідний масив даних.

- у відповідній комірці відповідно до таблиці 3.3 *E(X)* задати формулою: (=«СУММПРОИЗВ (массив 1, массив 2)/σ^4) – 3», де – «масив 1» - значення «(x_i − M(X))^4», «масив 2» - значення p_i. В даному випадку «(x_i − M(X))^3» (G12:G21), *P*(D12:D21).

10. Записати функцію розподілу 3.1 дискретної випадкової величини у вигляді наступної таблиці 3.6.

11. Побудувати графік функції розподілу:

- - таблицю 3.6. привести до вигляду таблиці 3.7

- - обрати для побудови кривої графік типу «Точечная с прямыми отрезками» (рис.3.5).

Таблиця 3.6.

P	X
0	x<=23
0,01	23<x<=28
0,04	28<x<=33
0,08	33<x<=38
0,21	38<x<=43
0,36	43<x<=48
0,64	48<x<=53
0,8	53<x<=58
0,88	58<x<=63
0,94	63<x<=68
1	x>68

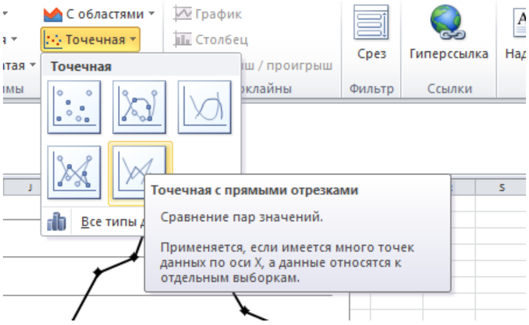


Рис.3.5. Вибір кривої

Таблиця 3.7.

P	X
0	20
0	23
0,01	23
0,01	28
0,04	28
0,04	33
0,08	33
0,08	38
0,21	38
0,21	43
0,36	43
0,36	48
0,64	48
0,64	53
0,8	53
0,8	58
0,88	58
0,88	63
0,94	63
0,94	68
1	68
1	70

- перейти в «конструктор→выбрать данные→добавить»;
- у вікно побудови графіка (рис.3.6) ввести наступні параметри:

«Значения X:» – значення ряду X з таблиці 3.7

«Значения Y:» – значення ряду P з таблиці 3.7

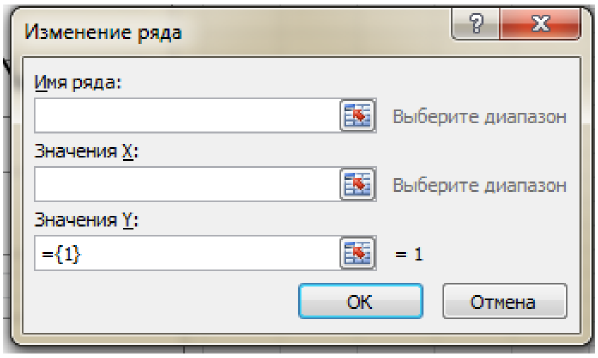


Рис. 3.6 Вікно параметрів графіка

- за допомогою «макет диаграммы» підписати осі графіка та назву (додаток 3.2).
- встановити границі осі X від x_i до x_n, а осі Y від p_i до p_n.

Завдання 3.2. Задати таблицю розподілу дискретної випадкової величини зі значеннями X.

а) Розрахувати ймовірність за:

3.2.1. рівномірним законом;

3.2.2. біноміальним законом;

3.2.3. показником;

3.2.4. геометричним;

3.2.5. гіпергеометричним.

в) розрахувати числові характеристики дискретної випадкової величини за загальними формулами, наведеними в таблиці 3.3, та за частковими – наведеними в таблиці 3.4.

б) побудувати багатокутник розподілу та графік функції розподілу для кожного розподілу.

Вхідні дані:

Таблиця значень X та необхідні дані для законів розподілу відповідно до номеру варіанта (додаток 3.1 таблиця Д.3.2).

Приклад оформлення та розрахунку (див. Додаток 3.3.).

Порядок виконання завдання 3.2.1.

1. Перейменувати «Лист 1» у «Завдання 3.2»
2. Записати вхідні дані. У даному випадку ***n* = 7.**
3. Створити таблицю з вхідними даними X.
4. Комірці G6 присвоїти формулу ймовірності для x_0 рівномірного закону розподілу згідно табл.3.5. У даному випадку $P_7(0)$=1/$C$6, де $C$6 – значення *n*, закріплене.
5. Скопіювати комірку G6 та заповнити ряд H6:M6.
6. Знайти числові характеристики та побудувати графіки відповідно до **завдання 3.1**, **п.5-11**. та за формулами часткового випадку. Порівняти отримані результати.
7. Повторити п.п. 1-6 для інших розподілів дискретних випадкових величин.

Завдання 3.3. Задати щільність ймовірності та функцію розподілу неперервної випадкової величини, заданої:

3.3.1. рівномірним законом на інтервалі [*a, b*];

3.3.2. нормальним законом, при відомій кількості дослідів *n* та ймовірності *p*;

3.3.3. показниковим, при відомій кількості дослідів n та ймовірності p.

а) розрахувати числові характеристики неперервної випадкової величини за загальними формулами, наведеними в таблиці 3.4.

б) побудувати графік щільності ймовірності та графік функції розподілу.

в) знайти ймовірність попадання в задану ділянку [c,d].

Вхідні дані:

- кількість дослідів n;
- ймовірність p;
- інтервал $[a, b]$;
- крок інтегрування h.

Вхідні дані залежать від розподілу та наведені в додатку 3.1 таблиця Д.3.3 відповідно до № Варіанту.

Приклад оформлення та розрахунку (див. Додаток 3.4).

Порядок виконання Завдання 3.3.1

1. Перейменувати «Лист 3» у «Завдання 3.3».
2. Записати вхідні дані. У даному випадку a=0, b=15 та крок інтегрування h=1 (масив (B7:F7; B8:F8).
3. Задати значення x, розбивши проміжок від 0 до 15 з кроком 1:

   - комірці B12 присвоїти значення a (C7).
   - у комірці B13 задати логічну формулу «=ЕСЛИ(B12=$C$8;"stop"; B12+$F$7)», яка обмежить значення x=15 ($C$8) при наступному копіюванні.
   - скопіювати значення комірки B13 та вставити в наступні комірки до появи слова «stop».

4. Комірці C12 присвоїти формулу щільності ймовірності рівномірного розподілу згідно табл.3.5. У даному випадку «=1/($C$8-$C$7)», де $C$7 та $C$8 – значення a та b, відповідно.
5. Скопіювати комірку C12 та заповнити ряд C13:C26.

6. Комірці D12 присвоїти формулу функції рівномірного розподілу згідно табл.3.5. У даному випадку «=(B12-$C$7)/($C$8-$C$7)», де B12 – значення *x*, $C$7 та $C$8 – значення *a* та *b*, відповідно.

7. Скопіювати комірку D12 та заповнити ряд (D13:D27).

8. Знайти числові характеристики:

- математичне сподівання, присвоївши комірці G12 формулу «=(C7+C8)/2», де C7 та C8 – значення *a* та *b*, відповідно.
- дисперсію, присвоївши комірці G13 формулу «=((C8-C7)^2)/12».
- середнє квадратичне відхилення, присвоївши комірці G14 формулу «=КОРЕНЬ(G13)», де G13 – отримане значення дисперсії.

9. Знайти значення ймовірності попадання точки в проміжок [c;d]. У даному випадку [2;9]:

- присвоїти комірці F18 формулу «=(H8-F8)/(C8-C7)», де H8 та F8 – значення c та d, відповідно; C7 та C8 – значення *a* та *b*, відповідно;
- зробити перевірку за формулою з таблиці 3.2.

10. Побудувати графіки щільності ймовірності та функції розподілу відповідно до п.11 завдання 3.1.

11. Повторити п.п. 1-10 для інших розподілів неперервних випадкових величин.

3.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді не пізніше ніж до наступного комп'ютерного практикуму.

2. Назва електронного файлу **КП3_Прізвище студента_№варіанту.**

3. Файл повинен місти наступні елементи:

Дано: *вхідні дані* – позначити жовтим;

Знайти: *невідоме з вказаною умовою* – позначити червоним;

Розв'язок: *Зробити опис кожної дії* – позначити зеленим.

Перевірка: - позначити синім.

Відповідь: - позначити червоним.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.

3. Оформлення завдань згідно Додатку 3.2 та 3.4.

Якщо звіт не відповідає вимогам, то робота не приймається!

3.4. Контрольні запитання

1. Що таке дискретна випадкова величина?. Назвіть основні закони розподілу дискретних випадкових величин?
2. Що таке неперервна випадкова величина? Назвіть основні закони розподілу неперервних випадкових величин?
3. Назвіть основні числові характеристики дискретних випадкових величин?
4. Назвіть основні числові характеристики неперервних випадкових величин?
5. Опишіть рівномірний закон розподілу дискретної випадкової величин та його числові характеристики.
6. Опишіть закон Пуассона розподілу дискретної випадкової величини та його числові характеристики.
7. Опишіть геметричний закон розподілу дискретної випадкової величин та його числові характеристики.
8. Опишіть гіпергеометричний закон розподілу дискретної випадкової величин та його числові характеристики.
9. Опишіть рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величин та його числові характеристики.
10. Опишіть показниковий закон розподілу неперервної випадкової величин та його числові характеристики.
11. Опишіть нормальний закон розподілу неперервної випадкової величин та його числові характеристики.
12. Якими функціями MS Excel задаються основні закони розподілу?

Комп'ютерний практикум №4

СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ТА ЙОГО ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мета: Навчитись визначати числові характеристики вибірки.

Змістовність роботи: Статистичний розподіл: таблична та графічна форма запису. Числові характеристики вибірки: середнє значення, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Використання функцій та пакету «Аналіз даних» MS Excel для розрахунку числових характеристик вибірки та побудови графіків.

4.1. Теоретичні відомості

Упорядкований перелік варіант і відповідних їм частот називається **статистичним розподілом вибірки** або **дискретним варіаційним рядом**. Якщо число різних значень у вибірці є досить великим, то розраховувати частоту кожного з них немає сенсу. У даному випадку складають **інтервальний варіаційний ряд**. Весь проміжок вибірки [x_{min}, x_{max}] (від максимального до мінімального) розбивають на часткові інтервали, тобто проводять групування.

Число інтервалів може бути розраховане за формулою Стерджерса:

$$k \approx 1 + log_2 n, \tag{4.1}$$

де $log_2 n = 3.322 lg\, n$, значення k підбирається цілим.

Довжина інтервалу знаходиться за формулою (4.2):

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}. \qquad (4.2)$$

За початок першого часткового інтервалу, як правило, вибирається точка $x_0 = x_{min} - \frac{h}{2}$.

У перший рядок таблиці інтервального ряду вписують часткові інтервали $[x_0, x_1]$, $(x_1, x_2]$, …$(x_{k-1}, x_k]$, що мають однакову довжину h, при цьому весь інтервал $[x_0, x_k]$ повинен повністю покривати всі значення обраної ознаки, тобто $x_0 \le x_{min}, x_{max} \le x_k$. У другому рядку записується кількість попадань (частота) m_i (i=1,2…k) в кожен інтервал. Таким чином, статистичний розподіл має вигляд таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 Інтервальний варіаційний ряд

$(x_{i-1}; x_i]$	$[x_0; x_1]$	$(x_1; x_2]$	…	$(x_{k-1}; x_k]$	Σ
m_i	m_1	m_2	…	m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
$p_i^* = \frac{m_i}{n}$	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*	$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$

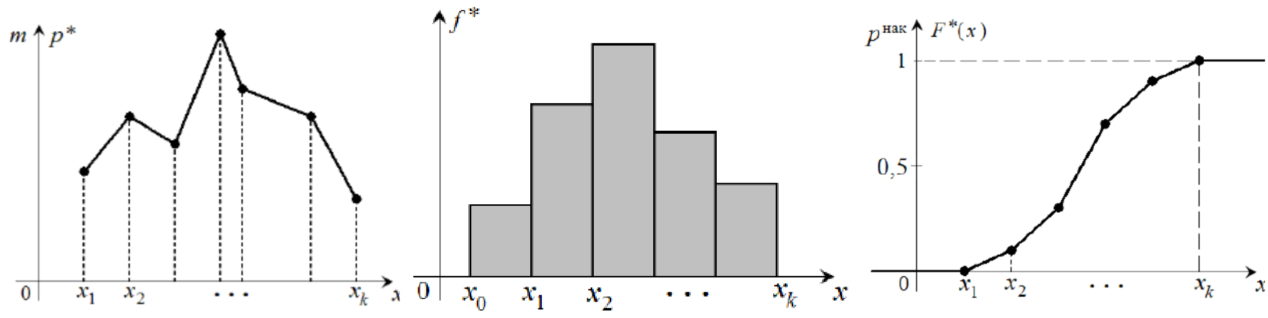
При вивченні варіаційних рядів використовують також поняття **накопиченої частоти** $m_i^{нак}$. Накопичена частота показує, скільки спостерігається варіантів із значенням ознаки, меншої за x. Відношення накопиченої частоти до загальної кількості спостережень називають **накопиченою відносною частотою** $p_i^{нак}$. Накопичені частоти для кожного інтервалу знаходять послідовним сумуванням частот всіх попередніх інтервалів, включаючи даний.

Статистичний ряд може бути представлений у вигляді полігону, гістограми і кумуляти.

Полігоном частот або **відносних частот** називають ламану лінію, яка з'єднує точки дискретного ряду (x_i, m_i) або (x_i, p^*_i), відповідно (рис.4.1.а). Для неперервного ряду полігон будуються для середніх значень інтервалу $x_{сер}$.

Гістограмою відносних частот називаються ступінчаста фігура (рис.4.1.б), що складається з прямокутників, основою яких є часткові інтервали (довжини $h_i = x_i - x_{i-1}$), а висоти дорівнюють відношенню $f_i^* = \dfrac{p_i^*}{h}$ (або інколи $f_i^* = p_i^*$).

Кумулятою називається крива накопичених частот (рис.4.1.в), яка має вигляд ламаної лінії, що з'єднує точки (x_i, $m_i^{нак}$) або (x_i, $p_i^{нак}$).



а) б) в)

Рис. 4.1 Графічний вигляд статистичного ряду:
полігон відносних частот (а); гістограма відносних частот (б);
кумулята відносних частот (в)

Числові та описові характеристики вибірки.

Для вибірки можна визначити ряд числових характеристик, аналогічних тим, що використовуються в теорії ймовірності та визначаються для випадкових величин. У таблиці 4.2 представлені найменування та позначення, що використовуються в статистиці для оцінки вибірки, і аналогічно – у теорії ймовірності. А також відповідні формули для розрахунку згрупованого статистичного ряду та відповідна функція MS Excel. Оскільки в даній роботі розглянуто інтервальний ряд розподілу, то для розрахунку числових характеристика $x_i = \tilde{x}_i$, де $\tilde{x}_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ - середина інтервалу, m_i – відповідна частота, $i = 1,2,\ldots,k$. μ_3 та μ_4 - центральні моменти третього та четвертого порядків (див.КП.3).

Таблиця 4.2 Оцінка вибірки для статистики та теорії ймовірності

Статистичне позначення	**Теорія ймовірності**	**Формула**	**Функція MS Excel**
Вибіркове середнє $\overline{x}_в$, $\overline{x}$, $M^*[X]$, m_x^*	Математичне сподівання *M(x)*	$\overline{x_в} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*$	СРЗНАЧ()
Вибіркова дисперсія $D_в$	Дисперсія *D(x)*	$D_в = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_в})^2 \cdot p_i^*$	ДИСП()
Вибіркове середньо-квадратичне відхилення	Середньо-квадратичне відхилення	$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$	СТАНДОТКЛОН()
Мода $\boldsymbol{M_o^*}$	Мода $\boldsymbol{M_o}$	$M_O^* = x_{i-1} + h_i \cdot \cdot \frac{p_i^* - p_{i-1}^*}{(p_i^* - p_{i-1}^*) + (p_i^* - p_{i+1}^*)},$	МОДА()
Медіана M_e^*	Медіана M_e	$M_e^* = x_{i-1} + \frac{h_i}{p_i^*} \cdot \left(0{,}5 - \sum_{j-1}^{i-1} \frac{h_j}{p_j^*}\right)$	МЕДИАНА()
Асиметрія, a_S	Асиметрія, A_S	$a_S = \frac{\mu_3}{\sigma_в{}^3}$	СКОС()
Ексцес, e_S	Ексцес, E_S	$e_S = \frac{\mu_4}{\sigma_в{}^4} - 3$	ЭКСЦЕСС()

4.2. Завдання до виконання роботи

Перед початком виконання роботи встановити «Пакет анализа данных». Для цього виконати наступні дії: «Файл» → «Параметры» → «Надстройки» → «Пакет анализа данных» і натиснути кнопку «Перейти» (рис.4.2). Обрати «Пакет анализа» і натиснути кнопку «ОК».

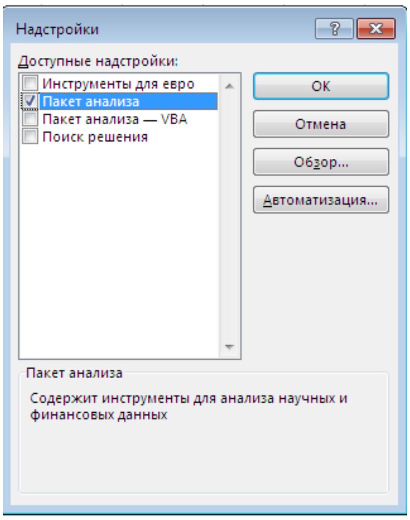


Рис. 4.2 Вікно налаштування «Пакета анализа»

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву: **КП4_Прізвище студента_№варіанту**.

Завдання 4.1.

Згенерувати вхідні данні в залежності від номеру варіанту (табл.4.3).

Таблиця 4.3 Вхідні дані до завдання 4.1.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	100	110	120	130	100	110	120	130	100	110	120	100
$\overline{x}_в$	20	20	20	0,64	0,64	0,64	40	40	40	0,93	60	45
$\boldsymbol{\sigma}_В$	3	4	2	0,1	0.34	0,57	7	5	3	0,1	35	5
	13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**17**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
n	120	130	100	110	120	130	100	110	120	130	100	120
$\overline{x}_в$	0,93	0,93	80	80	80	0,85	0,85	0,85	50	50	0,85	60
$\boldsymbol{\sigma}_В$	0,05	0,24	5	6	9	0,5	0,2	0,7	3	7	0,2	24

n – число випадкових чисел;

$\overline{x}_в$ – середнє значення;

$б_в$ – середнє відхилення.

Для парних варіантів – розподіл нормальний, для непарних – Пуассона.

Спільні значення для всіх варіантів:

«Число переменных» - 1;

«Случайное рассеивание» - пусте поле;

«Параметры вывода» - «Выходной интервал» - виділити область для запису даних.

Порядок виконання Завдання 4.1.

1. Перейменувати «Лист 1» в «Завдання 4.1».
2. Згенерувати вхідні дані. Для цього виконати наступні дії: натиснути «Данные» → «Анализ нанных» → «Генерация случайных чисел» (рис.4.3).

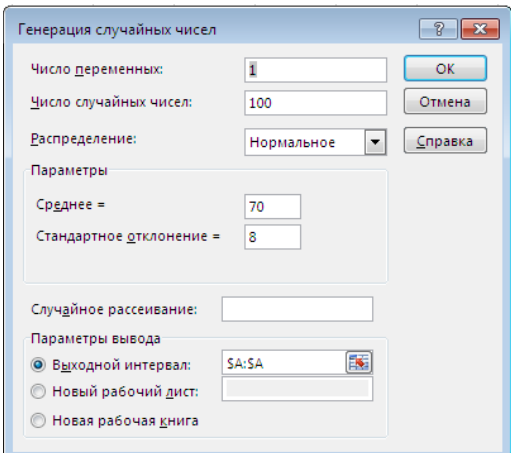


Рис. 4.3 Вікно «Генерация случайных чисел»

3. Заповнити дані відповідно до номеру варіанта.
4. Задати вхідні та натиснути кнопку «ОК».

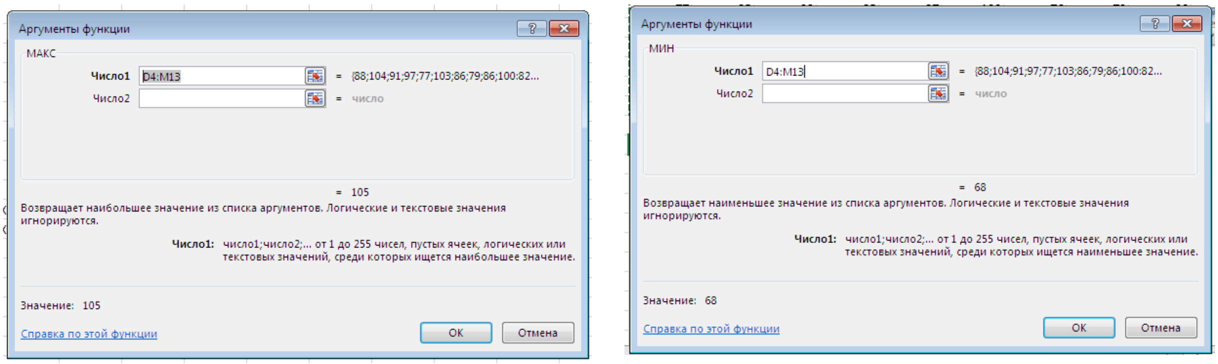
Завдання 4.2.

Сформувати з отриманих даних таблицю даних та скласти варіаційний ряд. Приклад виконання в додатку 4.1.

Порядок до виконання Завдання 4.2.

1. Перейменувати «Лист 2» в «Завдання 4.2».
2. Сформувати таблицю «Вхідні дані». У даному прикладі 10 стовпців на 10 рядків.

3. Знайти мінімальне $x_{\min}$ та максимальне $x_{\max}$ значення вибірки за допомогою вбудованих функцій «МИН» та «МАКС», відповідно (рис.4.4). Для визначення $x_{\max}$ комірці D14 присвоїти значення «МАКС(D4:M13)», а для визначення $x_{\min}$ комірці D15 присвоїти значення «МИН(D4:M13)». (D4:M13) – масив варіаційного ряду.



а) б)

Рис. 4.4 Вікно функцій: «МАКС» (а) та «МИН» (б)

4. Розрахувати кількість часткових інтервалів за формулою Стерджеса (4.1), яка в MS Excel задається наступним чином: «=ОКРУГЛВВЕРХ((1+3,32*LOG10(СЧЁТ(D4:M13)));0)», де функція «СЧЁТ(D4:M13)» визначає об'єм вибірки, а «0» – вказує на число знаків після коми.

5. Довжину інтервалу знаходимо за формулою (4.2), яка в MS Excel задається наступним чином: «=ОКРУГЛВВЕРХ(((D14-D15)/G14);0)».

6. Знайдемо початок інтервалу x_0 за формулою (4.3), яка в MS Excel задається наступним чином: «=D15-(G15/2)». Якщо кількість інтервалів в п.2 була цілою, то $x_0 = x_{min}$.

7. Скласти таблицю 4.4.варіаційного ряду та відносних частот.

Таблиця 4.4 Інтервальний варіаційний ряд

k	Інтервал, $(x_{(i-1)};x_i]$	Середина інтервалу, $\tilde{x}_i$	Частота, m_i	Відносна частота, p_i*	f*	F*

8. Заповнити значення k від 1 до 10.

9. Заповнити значення інтервалів ($x_{i-1};x_i$). Для цього виконати наступні дії: комірці D18 присвоїти значення J14 (x_0); комірці E18 присвоїти значення D18+G15 (h), скопіювати його та поширити на наступні комірки (E19:E27); D19 присвоїти значення E18, скопіювати та поширити на наступні комірки (D20:B27).

10. Знайти значення середини інтервалу. Комірці F18 присвоїти значення «=(E18+D18)/2», скопіювати та поширити на наступні комірки (F19: F27).

11. Визначити частоту. Для цього виділити відповідний масив розміщення частот (G18:G27) та за допомогою «Майстра функцій» задати функцію «ЧАСТОТА()» (рис.4.5). У полі «Массив_данных» задати дані вибірки (D4:M13), в у полі «Массив_интервалов» - масив визначених інтервалів (D18:E27). Натиснути разом клавіші CTRL+SHIFT+ENTER.

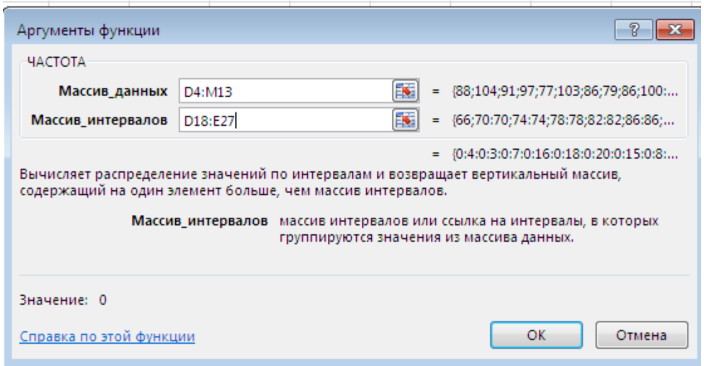


Рис. 4.5 Вікно функції «ЧАСТОТА»

12. Визначити відносну частоту. Для цього комірці H18 присвоїти значення «=G18/$J$15», де G18 – частота, $J$15 – об’єм вибірки.

13. Визначити частоту накопичення для побудови емпіричного графіку. Для цього комірці J18 присвоїти значення відносної частоти H18. Комірці J19 присвоїти значення «=J18+ H19». Скопіювати J19 та вставити до кінця ряду (J18: J27).

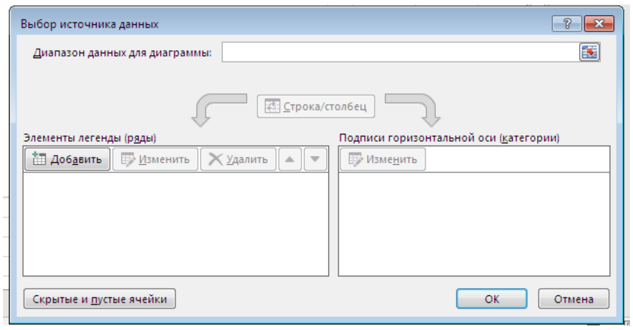
14. Зробити перевірку. Знайти суму частот та відносних частот.

Завдання 4.3.

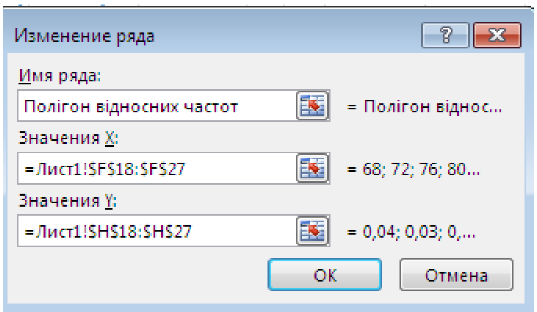
Побудувати полігон відносних частот, гістограму та кумуляту. Приклад виконання завдання показаний у додатку 4.1.

Порядок виконання завдання 4.3.

1. Побудувати полігон відносних частот. Для цього виконати наступну послідовність: «Вставка»→«Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезнами и маркерами» → «Выбрать данные» (рис.4.6.а). Натиснути кнопку «Добавить» і у вікні «Изменение ряда» в полі «Имя ряда» напистати «Полігон відносних частот», в полі «Значения X» - вставити ряд із значеннями середини інтервалу (F18:F27), у полі «Значения Y» - вставити ряд із значеннями відносної частоти (H18:H27).



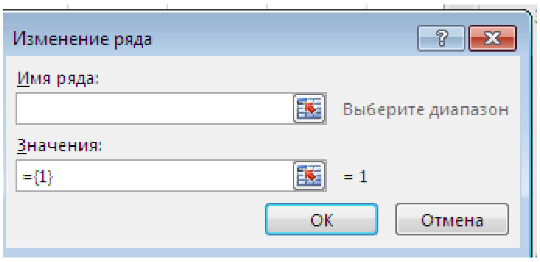
а)

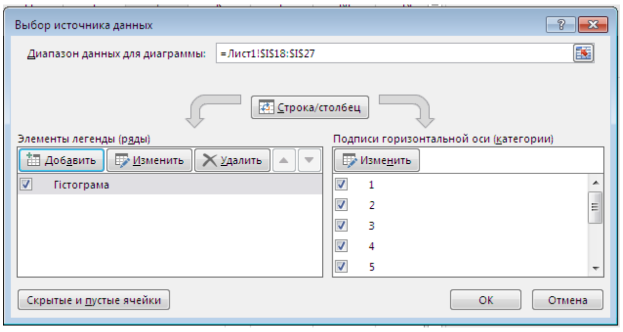


б)

Рис. 4.6 Вікна вибору даних для побудови полігону

2. Побудувати гістограму. Для цього виконати наступну послідовність: «Вставка»→«Диаграммы» → «Гистограма» → «Выбрать данные» (рис.4.6.а). Натиснути кнопку «Добавить» і у вікні «Изменение ряда» в полі «Имя ряда» напистати «Гістограма», в полі «Значения - вставити ряд із значеннями f^* (I18:I27) (4.7.а). Натиснути кнопку «ОК» і у вікні «Выбору источника данных» натиснути кнопку «Изменить» та ввести значення ряду середини інтервалу (F18:F27) (4.7.б). Перейти в «Экспресс-макет» і обрати «Макет 8».





а) б)

Рис. 4.7 Вікна вибору даних для побудови гістограми

3. Побудувати кумуляту. Для цього виконати наступну послідовність: «Вставка»→«Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезнами и маркерами» → «Выбрать данные» (рис.4.4.а). Натиснути кнопку «Добавить» і у вікні «Изменение ряда» в полі «Имя ряда» напистати «Кумулята», в полі «Значения X» - вставити ряд із значеннями середини інтервалу (F18:F27), в полі «Значения Y» - вставити ряд із значеннями F^* (J18:J27).

Завдання 4.4.

Знайти числові та описові характеристики вибірки. Приклад виконання завдання показаний у додатку 4.1.

Порядок виконання Завдання 4.4.

1. Знайти середнє вибірки. Присвоїти комірці O18 значення «=СРЗНАЧ(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.
2. Знайти дисперсію вибірки. Присвоїти комірці O19 значення «=ДИСП(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.
3. Знайти середнє відхилення вибірки. Присвоїти комірці O20 значення «=СТАНДОТКЛОНА(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.
4. Знайти коефіцієнт асиметрії. Присвоїти комірці O21 значення «=СКОС(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.
5. Знайти ексцес. Присвоїти комірці O22 значення «=ЭКСЦЕСС(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.

6. Знайти моду. Присвоїти комірці O23 значення «=МОДА(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.

7. Знайти медіану. Присвоїти комірці O24 значення «=МЕДИАНА(D4:M13)», де масив (D4:M13) – вхідні дані.

Завдання 4.5.

Знайти числові характеристики та побудувати графіки статистичного розподілу за допомогою вбудованого аналізу даних. Приклад виконання завдання показаний у додатку 4.2.

Порядок виконання завдання 4.5.

1. Повернутися до даних, отриманих в «Завдання 4.1».

2. Знайти числові характеристики. Для цього виконати наступні дії: натиснути «Данные» → «Анализ нанных» → «Описательная статистика» (рис.4.8).

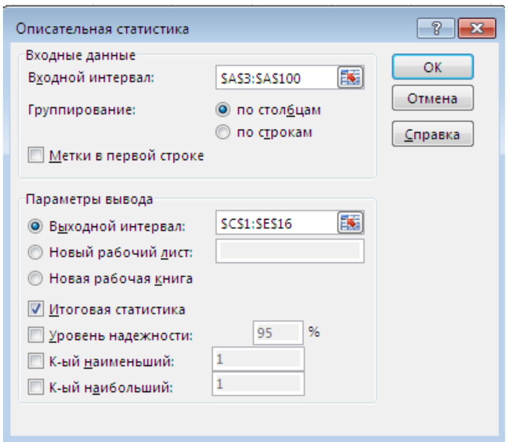


Рис. 4.8 Вікно «Описательная статистика»

У поле «Входной интервал» вставити ряд отриманих вхідних даних з завдання 4.1. Відмітити «Группирование» по стовпцях. У полі «Выходной интервал» виділити область виводу даних. Відмітити позначкою «Итоговая статистика».

3. Побудувати гістограму та кумуляту. Для цього виконати наступні дії: натиснути «Данные» → «Анализ нанных» → «Описательная статистика» (рис.4.9).

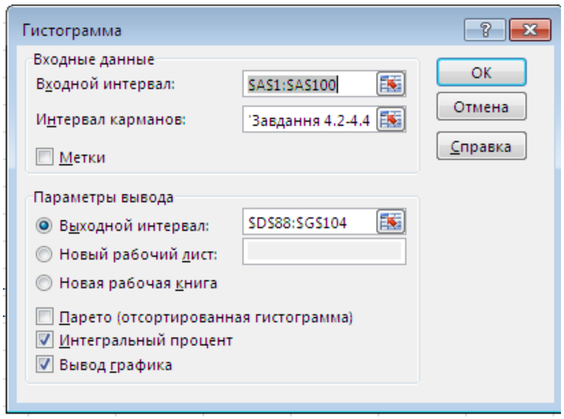


Рис .4.9 Вікно «Гистограмма»

У полі «Входной интервал» ввести вхідні дані. У полі «Интервал карманов» - ввсети дані з завдання 4.2 – середина інтервалу. Виділити поле для формування даних. Обрати вид гістограми.

4. Порівняти отримані дані з даними завдання 4.3 та 4.4.

4.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді.
2. Назва електронного файлу **КП4_Прізвище студента_№варіанту.**
3. Файл повинен містити наступні елементи:

Дано: *вхідні дані* – позначити жовтим;

Розв'язок: *проміжні результати* – позначити зеленим.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.
5. Оформлення завдань згідно Додатків 4.1-4.2.
6. Висновки по роботі.

Якщо звіт не відповідає вимогам, то КП не приймається!

4.4. Контрольні запитання

1. Що таке статистичний ряд? Які форми його запису?
2. Який вигляд має полігон частот?
3. Який вигляд має гістограма?
4. Який вигляд має кумулята?
5. Якими числовими характеристиками описується вибірка? Приведіть аналоги з теорії ймовірності.
6. Які функції MS Excel використовуються для створення варіаційного ряду?
7. Які два методи розрахунку в MS Excel числових характеристик ви знаєте?
8. Якими функціями MS Excel описують числові характеристики вибірки?
9. Назвіть переваги пакету «Аналіз даних».

СПИСОК ВИКОРИСТ АНИХ ДЖЕРЕЛ1

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: [учебное пособие для студентов вузов] / В. Е. Гмурман — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.

2. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. — К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.

3. Теорія ймовірностей у задачах автоматизації виробництва: Навчально-методичний посібник з курсу “Спеціальні розділи математики” для студ. спец. „Автоматизоване управління технологічними процесами” напряму „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології” / Уклад.: А.І. Жученко, В.В. Миленький, Л.Д. Ярощук. – К.:НТУУ «КПІ», 2008. — 70 с.

4. Руденко В.М. Математична статистика. Навч. посіб. / В.М. Руденко – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

5. Василенко О. А. Матемачно-статистичні методи аналізу у прикладних дослідженнях: навч. посіб. / О. А. Василенко, І. А. Сенча. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2011. – 166 с.

6. Жученко Ю. М. Основы статистики. Лабораторный практикум: учеб.-метод. пособие для студентов 2 курса всех факультетов медицинских вузов / Ю. М. Жученко, А. А. Ковалев, В. А. Игнатенко. — Гомель: ГомГМУ, 2016. — 176 с.

Додаток 1.1. Приклад оформлення завдання 1.1.

	Завдання 1.1.			
	C	D	E	F
4	Дано:			
5	i=	1		
6	k=	15		
7	a=	1		
8				
9				
10	**Роз'вязок:**			
11				
12	n	n!	Формула МС	Відхилення
13	1	1	0,928145488	0,071855
14	2	2	1,944586573	0,055413
15	3	6	5,954056081	0,045944
16	4	24	24,14319412	-0,14319
17	5	120	122,0382651	-2,03827
18	6	720	739,2313293	-19,2313
19	7	5040	5219,979205	-179,979
20	8	40320	42105,08981	-1785,09
21	9	362880	381952,8757	-19072,9
22	10	3628800	3848949,21	-220149
23	11	39916800	42657391,56	-2740592
24	12	479001600	515679928	-3,7E+07
25	13	6227020800	6752835089	-5,3E+08
26	14	87178291200	95223390540	-8E+09
27	15	1,30767E+12	1,43859E+12	-1,3E+11
	stop			

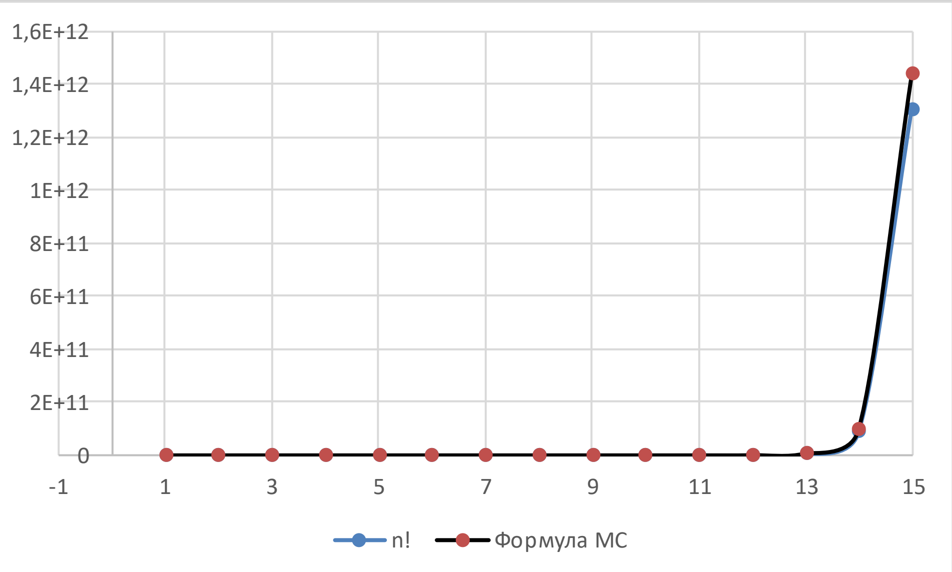


Рис.Д.1.1. Результати виконання завдання 1.1

Додаток 1.2. Приклад оформлення завдання 1.2.

	B	C	D
	Завдання 1.2.		
1	**Дано:**		
2			
3	n	10	
4	m	3	
5			
6	**Знайти:**	кількість	
7			
8	Операція		
9	Перестановки **n** об'єктів без повторень	3628800	
10	Перестановки **n** об'єктів з повтореннями	604800	
11	Розміщення по **m** елементів з **n** без повторень	720	720
12	Розміщення по **m** елементів з **n** з повторенням	1000	
13	Поєднання **m** елементів з **n** без повторень	120	120
14	Поєднання **m** елементів з **n** з повтореннями	220	

Рис.Д.1.2. Результати виконання завдання 1.2

Додаток 1.3. Приклад оформлення завдання 1.3.

Завдання 1.3.							
Задача 1.3.1				**Задача 1.3.6**			
				Дано:			
Дано:				Кількість деталей, n=	6		
				Стандартні деталі, m=	4		
Кількість забутих цифр, m=		2		Нестандартні, s=	2		
Всі цифри парні, n=		4		Витягнули, k=	**3**		
				Знайти:			
Знайти:				а) хоча б стандартна, m1=	**2**	1	
				б) тільки стандартних m2=	2		
P(A)-?				с)стандартних, m3= k=	3		
				P(C)-?			
Розв'язок:				**Розв'язок:**			
				Загальна кількість виходів			
Загальна кількість виходів, N=		12		N=C(n,m)=	20		
Сприятлива к-сть виходів, M=		1					
				А - стандартна			
Відповідь **P(A)=**		0,25		В - нестандартна			
				а) Сприятливі події			**б) Сприятливі події**
				C=ABB+AAB			C=AAB
				кількість сприятливих виходів, M	20		кількість сприятливих виходів, M
				P(C)=	1		Відповідь: P(C)=
				в) Сприятливі події			
				C=AAA			
				кількість сприятливих виходів, M	4		
				Відповідь: P(C)=	0,2		

Рис.Д.1.1. Результати виконання завдання 1.3

Додаток 2.1. Приклад оформлення завдання 2.1.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Завдання 2.1.											
4	Дано:			для Лапласа	і Пуассона							
5	n=	10		λ=n*p	6							
6				σ=(npq)^0,5	1,549193							
7	p=	0,6										
8	q=	0,4	Знайти:									
9	k1=	2	а) P10(2<k<8)=?									
10	k2=	8	б)P(|(m/n)-p|<ε)=?									
11	P1=	0,9	в) n>=?									
12	ε=	0,015	г) k0=?									
13		k	Бернуллі	Лапласа	Пуассона			x	f(x)	Φ(x)		
14		0	0,000104858	0,000142428	0,002479			-3,87298	0,000220649	-0,49995	Φ(x1)=	-0,49509
15		1	0,001572864	0,001408815	0,014873			-3,22749	0,002182527	-0,49938	Φ(x2)=	0,401647
16		2	0,010616832	0,009186629	0,044618			-2,58199	0,014231864	-0,49509		
17		3	0,042467328	0,039491378	0,089235			-1,93649	0,06117978	-0,4736		
18		4	0,111476736	0,111916051	0,133853			-1,29099	0,1733796	-0,40165		
19		5	0,200658125	0,209086709	0,160623			-0,6455	0,323915737	-0,2407		
20	Перевірка:	6	0,250822656	0,257516135	0,160623			0	0,39894228	0		
21		7	0,214990848	0,209086709	0,137677			0,645497	0,323915737	0,240697		
22		8	0,120932352	0,111916051	0,103258			1,290994	0,1733796	0,401647		
23		9	0,040310784	0,039491378	0,068838			1,936492	0,06117978	0,473596		
24		10	0,006046618	0,009186629	0,041303			2,581989	0,014231864	0,495088		
25		**Сума**	**1**	**0,998428913**	**0,957379**				**0,995088363**	**-0,99932**		
26		**Інтегральна**	1		0,957379							
27								Розв'язок:				
28	Перевірка:	n=10, p=0,4	1	0,998428913	0,99716			а)	P10(2<k<8)=	0,896736		
29		n=10, p=0,04	1	0,948653913	1			б) P(|(m/n)-p|<ε)=		0,077134		
30	Відповідь:							в)	n>=	2,512942		
31	а) P10(2<k<8)=	0,896735562							n>=	3		
32	б)P(|(m/n)-p|<ε)=	0,077134299						г)		5,6 <k0<		6,6
33	в) n>=	3							k0=	6		
34	г) k0=	6										

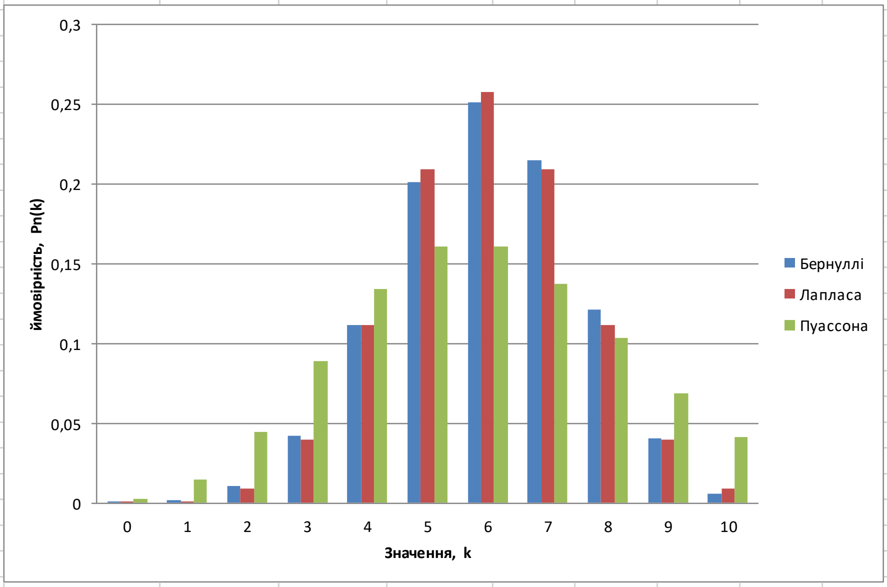


Рис.Д.2.1. Результати виконання завдання 2.1

Додаток 3.1. Вхідні дані

Таблиця Д.3.1. Вхідні дані до завдання 3.1

1	X	23	28	34	45	47	52	56	67	69	73
	P	0,01	0,03	0,04	0,13	0,15	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06
2	X	35	40	46	57	59	64	68	79	81	85
	P	0,05	0,07	0,14	0,31	0,18	0,11	0,05	0,04	0,03	0,02
3	X	65	115	175	285	305	355	395	505	525	565
	P	0,02	0,03	0,04	0,11	0,13	0,15	0,16	0,24	0,09	0,03
4	X	64	79	97	130	136	151	163	196	202	214
	P	0,01	0,04	0,08	0,13	0,34	0,18	0,12	0,07	0,02	0,01
5	X	61	71	83	105	109	119	127	149	153	161
	P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03
6	X	14	18	25	36	42	54	63	69	75	82
	P	0,02	0,03	0,04	0,12	0,15	0,26	0,15	0,09	0,08	0,06
7	X	26	30	37	48	54	66	75	81	87	94
	P	0,05	0,07	0,12	0,26	0,18	0,14	0,07	0,05	0,04	0,02
8	X	5	25	60	115	145	205	250	280	310	345
	P	0,02	0,03	0,05	0,12	0,14	0,15	0,17	0,19	0,09	0,04
9	X	37	49	70	103	121	157	184	202	220	241
	P	0,01	0,03	0,06	0,13	0,24	0,22	0,15	0,09	0,04	0,03
10	X	43	51	65	87	99	123	141	153	165	179
	P	0,03	0,04	0,08	0,23	0,17	0,14	0,12	0,09	0,06	0,04
11	X	55	58	64	71	77	83	89	92	97	103
	P	0,01	0,03	0,04	0,13	0,15	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06
12	X	67	70	76	83	89	95	101	104	109	115
	P	0,05	0,07	0,14	0,31	0,18	0,11	0,05	0,04	0,03	0,02
13	X	0	9	27	48	66	84	102	111	126	144
	P	0,02	0,03	0,04	0,11	0,13	0,15	0,16	0,24	0,09	0,03
14	X	160	169	187	208	226	244	262	271	286	304
	P	0,01	0,04	0,08	0,13	0,34	0,18	0,12	0,07	0,02	0,01
15	X	125	131	143	157	169	181	193	199	209	221
	P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03
16	X	0	3	10	15	19	24	30	35	48	56
	P	0,02	0,03	0,04	0,11	0,13	0,15	0,16	0,24	0,09	0,03
17	X	0	3	10	15	19	24	30	35	48	56
	P	0,03	0,04	0,08	0,23	0,17	0,14	0,12	0,09	0,06	0,04
18	X	100	131	143	160	169	185	193	199	209	221
	P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03
19	X	100	131	143	160	169	185	193	199	210	225
	P	0,1	0,2	0,2	0,15	0,1	0,08	0,06	0,05	0,04	0,02

20	X	2	3	12	15	20	24	30	35	48	50
	P	0,03	0,04	0,08	0,23	0,17	0,14	0,12	0,09	0,06	0,04
21	X	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22
	P	0,01	0,02	0,04	0,25	0,19	0,18	0,16	0,08	0,04	0,03
22	X	55	58	64	71	77	83	89	92	97	103
	P	0,02	0,02	0,04	0,14	0,14	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06
23	X	5	7	9	10	12	16	18	20	22	24
	P	0,02	0,02	0,04	0,14	0,14	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06
24	X	0	9	27	48	66	84	102	111	126	144
	P	0,1	0,2	0,2	0,15	0,1	0,08	0,06	0,05	0,04	0,02

Таблиця Д.3.2. Вхідні дані до завдання 3.2

Закон розподілу		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Рівномірний	*n*	7	8	9	10	7	8	9	10	7	8	7	10
Біноміальний	*n*	15	14	13	12	11	10	15	14	13	12	12	14
	p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,6	0,2
Пуасонна, 10^{-2}	*n*	15	14	13	12	11	10	15	14	13	12	15	10
	p	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	5	3
Геометричний	*k*	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	10	8
	p	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.5	0.7
Гіпер-геометричний	*N*	100	120	130	135	140	145	150	155	160	165	140	125
	M	90	100	100	120	120	120	130	130	130	130	120	110
	n	10	11	12	13	14	15	10	11	12	13	13	11
		13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Рівномірний	*n*	7	8	9	10	7	8	9	10	7	8	12	9
Біноміальний	*n*	11	10	15	14	13	12	11	10	15	14	16	17
	p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,7	0,5
Пуасонна, 10^{-2}	*n*	15	14	13	12	11	10	15	14	13	12	14	13
	p	2	3	4	4	6	4	3	2	1	3	5	8
Геометричний	*k*	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	8	9
	p	0.7	0.8	0.8	0.4	0.5	0.5	0.6	0.4	0.4	0.5	0.6	0.8
Гіпер-геометричний	*N*	50	55	60	65	70	80	85	90	95	100	155	60
	M	90	50	50	60	60	60	70	70	80	95	120	55
	n	10	11	12	13	14	15	10	11	12	13	10	17

Таблиця Д.3.3. Вхідні дані до завдання 3.3

Закон розподілу		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Рівномірний	*a*	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2
	b	15	15	15	15	20	20	20	20	20	20	20	9
	c	4	4	4	5	7	7	7	7	7	7	2	3
	d	14	13	12	12	19	18	17	16	15	14	6	7
Нормальний	*n*	30	40	13	12	11	10	15	14	13	12	25	35
	p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,3	0,4
	c	5	5	5	6	6	6	7	7	7	3	10	12
	d	10	20	8	9	10	11	13	14	10	11	15	30
Показниковий, 10^{-2}	*n*	15	14	13	12	11	10	15	14	13	12	15	16
	p	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	3	4
	c	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	2	3
	d	10	10	10	9	8	7	7	6	8	6	10	15
		13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Рівномірний	*a*	7	8	9	10	7	8	9	10	7	8	6	3
	b	15	20	25	25	20	20	30	30	25	25	15	10
	c	10	10	10	15	15	10	10	15	10	10	7	4
	d	12	15	20	18	19	15	17	25	15	18	10	9
Нормальний	*n*	11	10	15	14	13	12	11	10	15	14	10	14
	p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,8
	c	3	2	1	3	6	6	7	5	7	3	2	3
	d	8	7	8	9	10	11	10	11	10	11	8	8
Показниковий, 10^{-2}	*n*	15	14	13	12	11	10	15	14	13	12	16	17
	p	2	3	4	4	6	4	3	2	1	3	2	3
	c	2	2	2	3	3	3	2	2	2	3	2	3
	d	10	9	8	7	6	5	7	8	9	7	10	15

Додаток 3.2. Приклад оформлення завдання 3.1.

3.1. Опис дискретної випадкової величини, заданої таблицею розподілу

Дано:

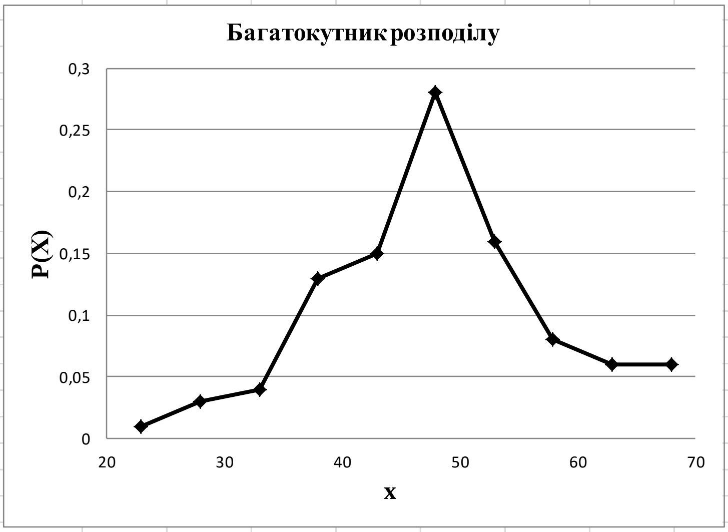
X	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	сумма
P	0,01	0,03	0,04	0,13	0,15	0,28	0,16	0,08	0,06	0,06	1

Розв'язок:

	C	D	E	F	G
11	Xi	Pi	Xi-M(X)	(Xi-M(X))^3	(Xi-M(X))^4
12	23	0,01	-25,2	-16003,008	403275,8016
13	28	0,03	-20,2	-8242,408	166496,6416
14	33	0,04	-15,2	-3511,808	53379,4816
15	38	0,13	-10,2	-1061,208	10824,3216
16	43	0,15	-5,2	-140,608	731,1616
17	48	0,28	-0,2	-0,008	0,0016
18	53	0,16	4,8	110,592	530,8416
19	58	0,08	9,8	941,192	9223,6816
20	63	0,06	14,8	3241,792	47978,5216
21	68	0,06	19,8	7762,392	153695,3616

Відповідь:

M(X)=	48,2	Me=	45,5
D(X)=	93,46	M0=	
σ(X)=	9,667471		
A(X)=	0,051372		
E(X)=	-0,06885		



Функція розподілу:

P	X	P	X
0	x<=23	0	20
0,01	23<x<=28	0	23
0,04	28<x<=33	0,01	23
0,08	33<x<=38	0,01	28
0,21	38<x<=43	0,04	28
0,36	43<x<=48	0,04	33
0,64	48<x<=53	0,08	33
0,8	53<x<=58	0,08	38
0,88	58<x<=63	0,21	38
0,94	63<x<=68	0,21	43
1	x>68	0,36	43
		0,36	48
		0,64	48
		0,64	53
		0,8	53
		0,8	58
		0,88	58
		0,88	63
		0,94	63
		0,94	68
		1	68
		1	70

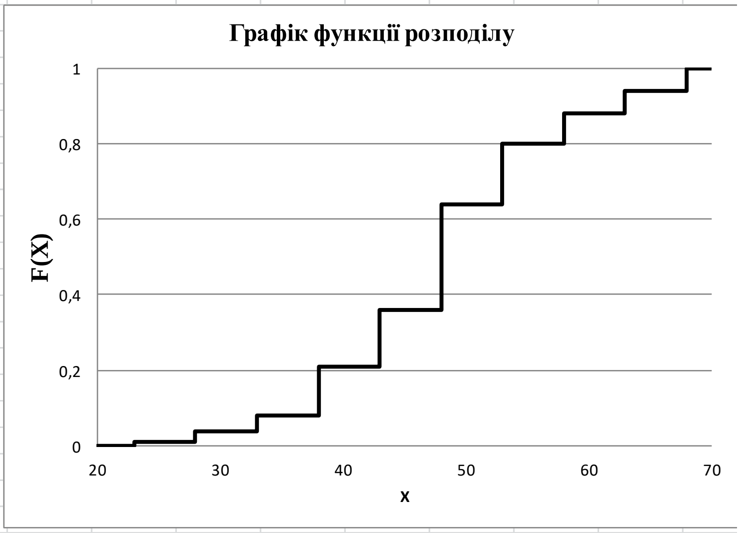


Рис.Д.3.1. Результати виконання завдання 3.1

Додаток 3.3. Приклад завдання 3.2.

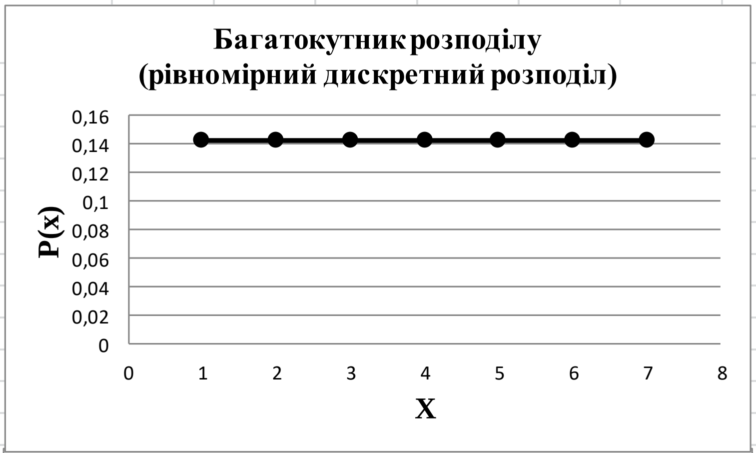
3.2.1. Рівномірний закон розподілу дискретної випадкової величини

Дано:		
n=		7

	F	G	H	I	J	K	L	M
5	Xi	1	2	3	4	5	6	7
6	Pi	0,142857	0,142857	0,142857	0,142857	0,142857	0,142857	0,142857
7	Xi-M(X)	-3	-2	-1	0	1	2	3
8	(Xi-M(X))^3	-27	-8	-1	0	1	8	27
9	(Xi-M(X))^4	81	16	1	0	1	16	81

	загальна формула	Частковий випадок
M(X)=	4	4
D(X)=	4	4
σ(X)=	2	2
A(X)=	7,21645E-16	0
E(X)=	-1,25	-1,25

P(X)	x
0	0
0	1
0,142857	1
0,142857	2
0,285714	2
0,285714	3
0,428571	3
0,428571	4
0,571429	4
0,571429	5
0,714286	5
0,714286	6
0,857143	6
0,857143	7
1	7
1	8



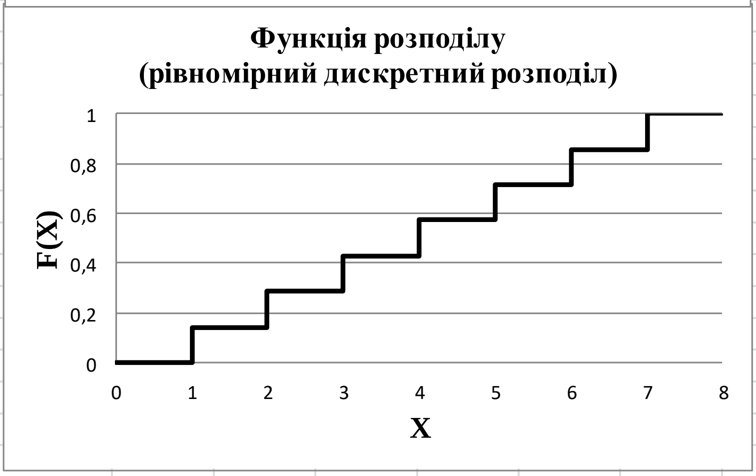


Рис.Д.3.2. Результати виконання завдання 3.2

Додаток 3.4. Приклад оформлення завдання 3.3.

Завдання 3.3.1. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини

Дано:

6	B	C	D	E	F	G	H
7	a=	0		h=	1		
8	b=	15		c=	2	d=	9

	B	C	D	E	F	G
11	x	f(x)	F(X)=			
12	0	0,067	0		M(X)=	7,5
13	1	0,067	0,067		D(X)=	18,75
14	2	0,067	0,133		σ(X)=	4,3301
15	3	0,067	0,2			
16	4	0,067	0,267			
17	5	0,067	0,333		P(2<x<9)	
18	6	0,067	0,4		0,4667	
19	7	0,067	0,467			
20	8	0,067	0,533		0,467	
21	9	0,067	0,6			
22	10	0,067	0,667			
23	11	0,067	0,733			
24	12	0,067	0,8			
25	13	0,067	0,867			
26	14	0,067	0,933			
27	15		1			
	stop					

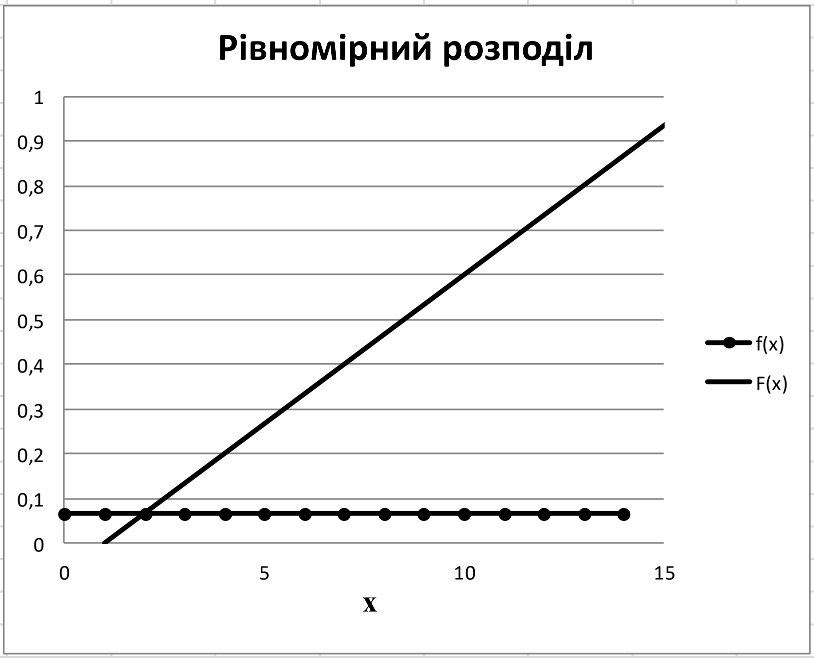


Рис.Д.3.3. Результати виконання завдання 3.3

Додаток 4.1. Приклад оформлення завдання 4.2-4.4.

Завдання 4.2.

Вхідні дані:

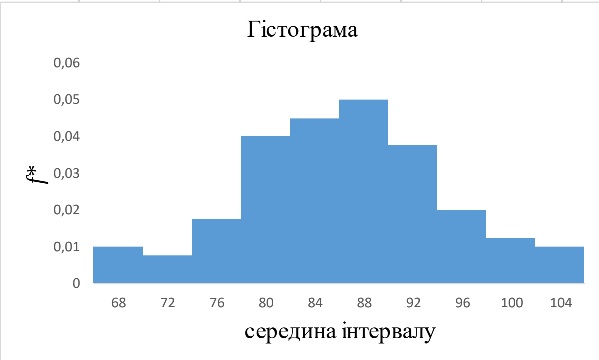
	C	D	E								
4		88	104	91	97	77	103	86	79	86	100
5		82	68	71	87	89	89	81	81	70	79
6		84	91	87	83	90	69	83	96	79	94
7		93	86	81	83	84	92	93	85	84	88
8		77	85	93	85	87	100	76	79	90	91
9		84	74	76	75	93	103	80	96	72	95
10		81	102	75	80	90	85	82	77	94	102
11		87	95	99	83	80	93	90	79	93	105
12		95	85	84	90	93	95	98	88	79	91
13		86	88	93	80	88	88	90	68	89	90
14	Xmax	105	k=	10		x0=	66				
15	Xmin	68	h=	4		n=	100				

17	*k*	*Інтервал (x(i-1);xi]*		*Середина інтервалу*	*Частота mi*	*Відносна частота p**	*f**	*F**
18	1	66	70	68	4	0,04	0,01	0,04
19	2	70	74	72	3	0,03	0,0075	0,07
20	3	74	78	76	7	0,07	0,0175	0,14
21	4	78	82	80	16	0,16	0,04	0,3
22	5	82	86	84	18	0,18	0,045	0,48
23	6	86	90	88	20	0,2	0,05	0,68
24	7	90	94	92	15	0,15	0,0375	0,83
25	8	94	98	96	8	0,08	0,02	0,91
26	9	98	102	100	5	0,05	0,0125	0,96
27	10	102	106	104	4	0,04	0,01	1
	сума				100	1		

Завдання 4.4. Числові характеристики —

Середнє значення, $\bar{X}_в$	86,74
Дисперсія, D	70,37616
Середнє відхилення, б	8,38905
Коефіцієнт асиметрії, A	-0,05492
Ексцес, E	-0,27417
Мода, Mo	93
Медіана, Me	87

Завдання 4.3.



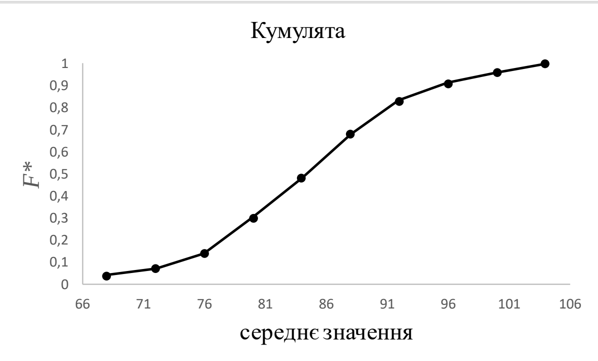


Рис.Д.4.1. Результати виконання завдання 4.2 - 4.4

Додаток 4.2. Приклад оформлення завдання 4.5.

Завдання 4.5.

Среднее	86,74
Стандартная ошибка	0,83890501
Медиана	87
Мода	93
Стандартное отклонение	8,389050102
Дисперсия выборки	70,37616162
Эксцесс	-0,274172272
Асимметричность	-0,054920036
Интервал	37
Минимум	68
Максимум	105
Сумма	8674
Счет	100

Карман	*Частота*	*Интегральный %*
68	2	2,00%
72	4	6,00%
76	5	11,00%
80	13	24,00%
84	15	39,00%
88	19	58,00%
92	15	73,00%
96	16	89,00%
100	5	94,00%
104	5	99,00%
Еще	1	100,00%

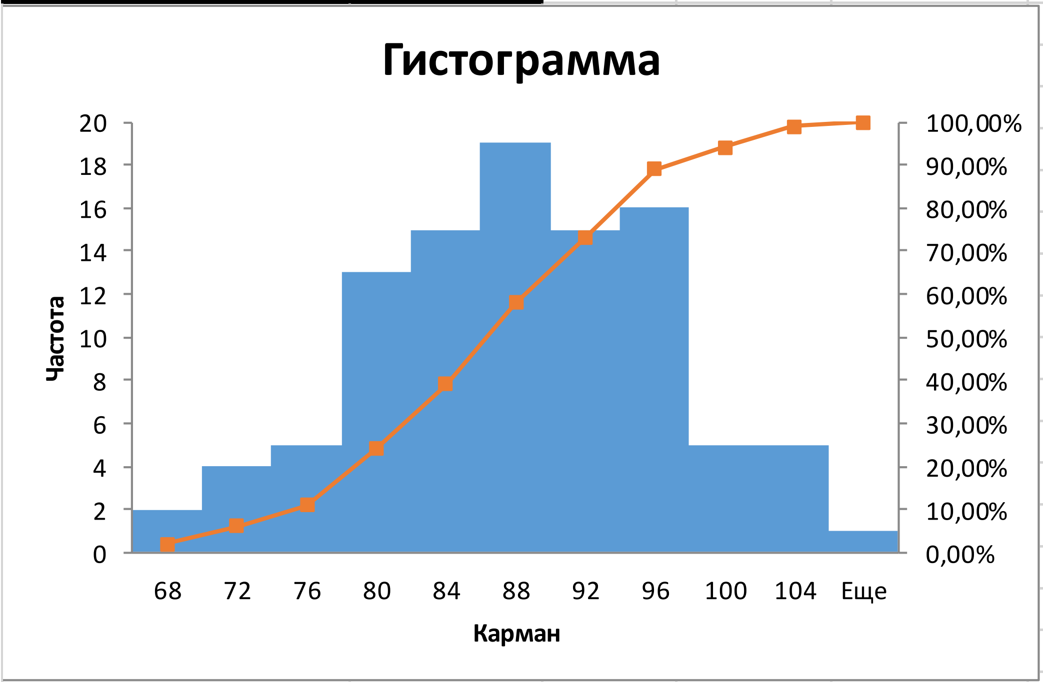


Рис.Д.4.2. Результати виконання завдання 4.5